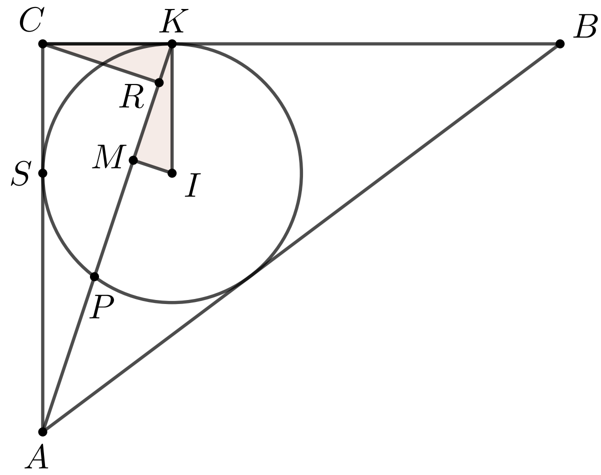
**Problema săptămânii 104**
Cercul înscris în triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $m(\angle C) = 90°$, este tangent laturii $[BC]$ în punctul $K$. Demonstraţi că lungimea coardei determinate de dreapta $AK$ pe cercul înscris este de două ori mai mare decât distanţa de la punctul $C$ la respectiva dreaptă.

*Olimpiada de geometrie Sharygin*, faza finală, 2018

**Soluţia 1:**
Fie $I$ centrul cercului înscris, $P$ al doilea punct de intersecţie a dreptei $AK$ cu cercul înscris şi $M$ mijlocul lui $[KP]$. Evident, triunghiul $CIK$ este dreptunghic şi are $m(\angle KCI) = 45°$, deci el este dreptunghic isoscel. Dacă $R$ este proiecţia lui $C$ pe $AK$, atunci triunghiurile dreptunghice $CRK$ şi $KMI$ sunt congruente. Întradevăr, avem $CK = MI$ şi, cum $IK \parallel AC$, avem şi $\angle MKI \equiv \angle KAC \equiv \angle RCK$. Rezultă că $PK = 2MK = 2CR$ şi concluzia.



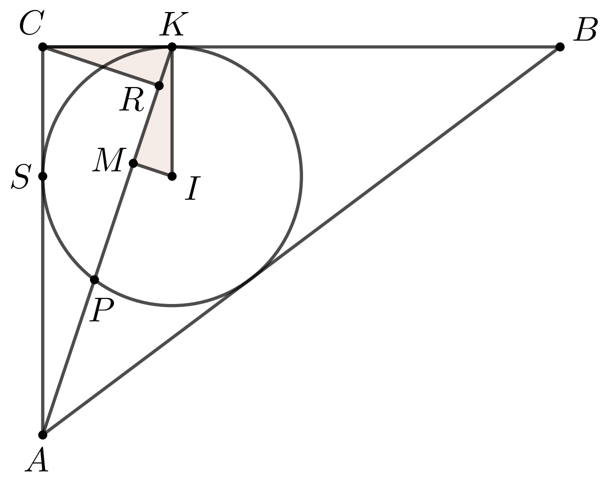

**Soluţia 2:**
Cu notaţiile din soluţia precedentă, avem $2\mathcal{A}_{ACK} = CK \cdot AC = CR \cdot AK$, deci $CR \cdot AK = b(p-c)$. Din puterea punctului $A$ faţă de cercul înscris avem $AP \cdot AK = AS^2 = (p-a)^2$ (am notat cu $S$ punctul de tangenţă a cercului înscris cu latura $[AC]$). Din teorema lui Pitagora, $AK^2 = AC^2 + CK^2 = b^2 + (p-c)^2$. Prin scăderea ultimelor două relaţii rezultă că $PK \cdot AK = b^2 + (p-c)^2 - (p-a)^2$. În fine, $PK = 2CR \Leftrightarrow PK \cdot AK = 2CR \cdot AK \Leftrightarrow b^2 + (p-c)^2 - (p-a)^2 = 2b(p-c)$, relaţie care se verifică imediat.

The English solutions are on the next page.

**Problem of the week no. 104**
The incircle of a right-angled triangle $ABC$ ($\angle C = 90°$) touches $BC$ at point $K$. Prove that the chord of the incircle cut by line $AK$ is twice as large as the distance from $C$ to that line.

*Sharygin Mathematical Olympiad*, final round, 2018

**Solution 1:**
Let $I$ be the incenter of $ABC$ and let the line $AK$ meet again the incircle at $P$. Denote by $M$ the midpoint of the line segment $[PK]$ and by $R$ the projection of $C$ onto $AK$. Obviously, triangle $CIK$ is right-angled and has $\angle KCI = 45°$, hence it is isosceles. Triangles $CRK$ and $KMI$ are equal. Indeed, they are right-angled, $CK = MI$ and, as $IK \parallel AC$, we also have $\angle MKI = \angle KAC = \angle RCK$. It follows that $PK = 2MK = 2CR$ and the conclusion.




**Solution 2:**
With the notation from above, we have: $2 \cdot [ACK] = CK \cdot AC = CR \cdot AK$, hence $CR \cdot AK = b(s-c)$, where $s = \frac{a+b+c}{2}$ is the semi-perimeter. From the power of point $A$ with respect to the incircle, $AP \cdot AK = AS^2 = (s-a)^2$ (where $S$ is the touch-point of the incircle with the side $AC$). From Pitagora's Theorem we get $AK^2 = AC^2 + CK^2 = b^2 + (s-c)^2$. By subtracting the last two equalities we obtain $PK \cdot AK = b^2 + (s-c)^2 - (s-a)^2$. Finally, $PK = 2CR \Leftrightarrow PK \cdot AK = 2CR \cdot AK \Leftrightarrow b^2 + (s-c)^2 - (s-a)^2 = 2b(s-c)$, which is easy to check.