Problema săptămânii 99
Determinaţi numerele prime p şi numerele naturale m astfel încât $2p^2+p+9=m^2$.

Olimpiadă Ucraina, 2009

Soluţie:
Ecuaţia se scrie $p(2p+1)=(m-3)(m+3)$, deci p divide $m-3$ sau p divide $m+3$.
Cazul I. p divide $m-3$. Atunci există k natural astfel încât $m=pk+3$. Ecuaţia revine la $p(2p+1)=kp(kp+6)$, adică $2p+1=k^2p+6k$. Pentru $k\geq 2$ avem evident $k^2p+6k>2p+1$ şi nici $k=0$ nu convine. Rezultă $k=1$ şi $p=5$, ceea ce conduce la $m=8$.
Cazul II. p divide $m+3$. Atunci există k natural astfel încât $m=pk-3$. Ecuaţia revine la $p(2p+1)=kp(kp-6)$, adică $2p+1=k^2p-6k$. Evident, trebuie $k\geq 2$.
Rezultă $p=\dfrac{6k+1}{k^2-2}<7$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $7k^2-6k-15>0$.
Ori, pentru $k\geq 2$, avem $k(7k-6)-15\geq 2(7\cdot 2-6)-15=1$.
Rămân de verificat cazurile $p\in\{2,3\}$. Niciunul din ele nu conduce la soluţii.
În concluzie, singura soluţie a ecuaţiei este $p=5$, $m=8$.

Problem of the week no. 99
Find all prime numbers p and positive integers m such that $2p^2+p+9=m^2$.

Ukrainian MO, 2009

Solution:
The equation can be written $p(2p+1)=(m-3)(m+3)$. Thus p divides $m-3$ or p divides $m+3$.
Case I. p divides $m-3$. There exists a positive integer k such that $m=pk+3$. ($k=0$ does not work.) The equation reduces to $2p+1=k^2p+6k$. For $k\geq 2$, obviously $k^2p+6k>2p+1$. It follows that $k=1$ and $p=5$, which leads to $m=8$.
Case II. p divides $m+3$. There exists a positive integer k such that $m=pk-3$. The equation becomes $2p+1=k^2p-6k$. Clearly, $k\geq 2$. It follows that $p=\dfrac{6k+1}{k^2-2}<7$, the last inequality being equivalent to $7k^2-6k-15>0$. Indeed, for $k\geq 2$, we have $k(7k-6)-15\geq 2(7\cdot 2-6)-15=1$.
All that remains is checking $p\in\{2,3\}$. None of these values lead to a solution.
In conclusion, the only solution is $p=5$, $m=8$.