Problema săptămânii 98
Se consideră o tablă 2018×2018 împărţită în pătrăţele unitate. Centrele unora din pătrăţelele unitate se colorează cu roşu. Care este numărul maxim de asemenea puncte care pot fi colorate cu roşu astfel încât să nu se formeze niciun triunghi dreptunghic care să aibă toate vârfurile colorate cu roşu?

Concursul Arany Dániel, Ungaria, 2018

Soluţia 1:
Colorăm punctele succesiv astfel încât să nu se formeze triunghi dreptunghic cu vârfurile roşii. De fiecare dată când colorăm un punct roşu suntem în următoarea situaţie: nu mai putem ulterior colora roşii şi puncte de pe aceeaşi linie şi puncte de pe aceeaşi coloană căci s-ar forma un triunghi dreptunghic (cu unghiul drept în punctul pe care tocmai l-am colorat). Cu alte cuvinte, colorarea unui punct interzice fie linia punctului, fie coloana punctului de la colorări ulterioare. Deoarece sunt 4036 linii şi coloane (împreună), putem avea cel mult 4035 de puncte roşii. Dar atunci ar exista o singură linie (coloană) permisă, ori pe o linie/coloană nu încap 4035 de puncte. Prin urmare putem avea cel mult 4034 de puncte.
Pe de altă parte, chiar este posibil să avem 4034 de puncte roşii fără a se forma triunghi dreptunghic cu vârurile roşii. Consideraţiile de mai sus ne arată că putem avea două linii/coloane permise. Putem alege prima linie şi prima coloană şi să colorăm cu roşu centrul fiecăruia din pătratele unitate aflate pe linia şi pe coloana alese, mai puţin centrul pătrăţelului din colţ aflat la intersecţia celor două.
În concluzie, răspunsul este 4034.

Remarcă: Din soluţia de mai sus se vede că pentru o tablă $m \times n$, $m, n \geq 2$, răspunsul este $m + n - 2$.

Soluţia 2: (bazată pe soluţia lui *Robert Dragomirescu*)
Vom demonstra că pentru un dreptunghi $2m \times 2n$, răspunsul este $g(m, n) = 2m + 2n - 2$.
Vom nota cu $f(m, n)$ numărul maxim de puncte pe care le putem colora cu roşu astfel încât să nu se formeze niciun triunghi dreptunghic cu catetele paralele cu laturile dreptunghiului. Evident, $f(m, n) \geq g(m, n)$. Să observăm mai întâi că putem colora pătrăţelele de pe prima linie şi prima coloană cu excepţia colţului comun. Nu se formează triunghiuri dreptunghice cu vârfurile roşii, deci $f(m, n) \geq g(m, n) \geq 2m + 2n - 2$.
Vom demonstra prin inducţie după $m + n$ că $f(m, n) \leq 2m + 2n - 2$. Va rezulta atunci că $2m+2n-2 \geq f(m, n) \geq g(m, n) \geq 2m+2n-2$, deci $g(m, n) = 2m+2n-2$.
Dacă $m + n = 2$, adică $m = n = 1$, este evident că putem colora roşii cel mult $f(1, 1) = 2$ puncte.
Fie (m, n) cu $m+n \geq 3$. Putem presupune $m \geq 2$ (cazul cu $n \geq 2$ este analog). Ştim că $f(m, n) = 2m + 2n - 2 > 2n$, deci există o coloană pe care se află cel puţin două puncte roşii. Alegem două puncte roşii aflate pe o aceeaşi coloană. Pe liniile acestora nu mai pot exista alte puncte roşii. Eliminând aceste două linii, obţinem un dreptunghi $(2m - 2) \times 2n$. Prin acestă eliminare nu am stricat eventualele triunghiuri

dreptunghice care aveau catetele paralele cu laturile dreptunghiului. Din ipoteza de inducţie, în dreptunghiul ales avem cel mult $f(m-1,n) \leq 2(m-1)+2n-2$ pătrăţele roşii, deci, împreună cu cele două pătrăţele roşii aflate pe liniile eliminate, în dreptunghiul $2m \times 2n$ putem avea cel mult $f(m,n) \leq 2+f(m-1,n) \leq 2m+2n-2$ pătrăţele roşii.

Soluţia 3: (*David Andrei Anghel*)
Vom arăta că numărul maxim de puncte roşii este 4034.
Presupunem prin reducere la absurd că pot fi colorate cel puţin 4035 de puncte. Notăm cu a_p numărul de linii care conţin exact p puncte roşii, $p \in \{0, 1, 2, \ldots, 2018\}$. Fie A un punct de pe o linie cu cel puţin două puncte roşii. Atunci există un punct B, diferit de A, care este roşu şi se află pe aceeaşi linie cu A. Atunci nu poate exista un punct roşu C, diferit de A, care să se afle pe aceeaşi coloană cu A deoarece, dacă ar exista, atunci triunghiul ABC ar avea toate vârfurile roşii şi ar avea $m(\sphericalangle BAC) = 90°$. Astfel, am demonstrat două lucruri:
(1) dacă există o linie cu 2018 puncte roşii, aunci nu mai pot fi puncte roşii; dar $2018 < 4035$, contradicţie;
(2) numărul de puncte de pe liniile cu cel puţin două puncte roşii este cel mult numărul de coloane, adică 2018, deci $2a_2 + 3a_3 + \ldots + 2018a_{2018} \leq 2018$.
Dacă $a_1 = 2018$, adică avem doar linii cu câte un singur punct roşu, atunci sunt $2018 \cdot 1 = 2018$ puncte roşii. Dar $2018 < 4035$, contradicţie.
Dacă $a_1 = 2017$, adică avem 2017 linii cu câte un singur punct roşu şi cu o linie care, conform (1) are cel mult 2017 puncte roşii, atunci sunt cel mult $2017 \cdot 1 + 2017 = 4034$ puncte roşii, dar $4034 < 4035$, contradicţie.
Dacă $a_1 \leq 2016$, atunci, conform (2), numărul de puncte roşii este $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 2018a_{2018} \leq 2016 + 2018 = 4034 < 4035$, contradicţie.
Astfel am arătat că presupunerea făcută este falsă, deci că sunt cel mult 4034 de puncte roşii.
Mai trebuie doar să dăm un exemplu cu 4034 de puncte roşii. Colorăm cu roşu centrele pătratelor aflate pe laturile de sus şi din dreapta ale pătratului, cu excepţia celui din colţul din dreapta-sus.

Problem of the week no. 98
Consider an 2018×2018 square divided into unit squares. Some of the centers of these unit squares are to be colored red. What is the maximum number of such points that one can color red without obtaining a right triangle whose vertices are all red?

Arany Dániel Contest, Hungary, 2018

Solution: Notice that whenever we color a point red, it forbids us to color red both points situated on the same line and points situated on the same column, otherwise we get a right triangle whose vertices are red. Thus, for each red point, there is a prohibited line or column. Altogether, there are 4036 lines and columns, so we can have at most 4035 red points. But then we would have only one line/column that is not prohibited and it is not possible to have all the points on that line (4035 do

not fit on a line of 2018). Thus, there are at most 4034 red points.
On the other hand, it is possible to color red 4034 points such that no right triangle is formed. From above, it follows that 4034 red points means we have 2 permitted lines/columns, so simply take the first line and the first column and color red all the centers of the unit squares on the line and the column considered with the exception of the unit square placed at their common corner.
Thus, the answer is 4034.

Remark: The solution above can be extended to an arbitrary $m \times n$ rectangle. In case $m, n \geq 2$, the answer is $m + n - 2$.