

Problema săptămânii 102

Un câmp de bătălie are forma unui pătrat 41×41 . Un tanc este ascuns într-unul din pătrățelele unitate ale câmpului. Un avion bombardează câmpul de bătălie țintind câte unul din pătrățelele unitate. Dacă o bombă nimerește tancul, acesta se mută într-un pătrățel vecin (unul cu care pătrățelul său are latură comună), în caz contrar tancul rămâne pe loc. Un tanc este distrus atunci când este nimerit a doua oară. Pilotul nu știe unde se află tancul și nu cunoaște efectul bombelor sale. Care este numărul minim de bombe pe care trebuie să le lanseze pilotul pentru a fi sigur că a distrus tancul?

S. Berlov, A. Magazinov, Olimpiadă Rusia, 2015, clasa a 9-a, ziua 2, pb 2

Soluție: Colorăm câmpul de bătălie ca pe o tablă de șah, cu colțurile albe. Dacă bombardăm toate pătrățelele negre, urmate de toate cele albe și apoi din nou toate cele negre, atunci avem garanția de a fi distrus tancul din 2521 de focuri. Pentru a arăta că acesta este numărul minim, să observăm că pentru oricare două pătrățele vecine A, B , trebuie lovite fie în ordinea B apoi A apoi B (nu neapărat consecutiv) sau A apoi B apoi A . Asta este singura cale de a acoperi atât situația în care tancul este în A și se mută în B atunci când este lovit, și cazul în care tancul este în B și se mută în A atunci când este lovit. În particular, pentru orice pereche de pătrățele vecine, una din ele trebuie lovită de două ori, cealaltă minim o dată. Numărul minim de focuri necesar se atinge când orice pătrățel negru este țintit de două ori, iar fiecare pătrățel alb o dată. (Dacă așezăm 840 de dominouri pe pătratul mare, fără suprapuneri, astfel încât fiecare dominou să acopere câte două pătrățele unitate, atunci un pătrățel rămâne neacoperit. Din cele două pătrățele acoperite de fiecare dominou, unul trebuie să fie lovit de două ori, celălalt o dată. Pătrățelul neacoperit de dominouri trebuie și el țintit o dată. Așadar este nevoie de cel puțin $3 \cdot 840 + 1 = 2521$ focuri.)

Problem of the week no. 102

A battlefield has the shape of a 41×41 square. A tank is concealed in one of the cells of the field. A fighter airplane fires shots at the cells of the field. If a shot hits the tank, then the tank moves to a neighboring cell of the field, otherwise it stays in its cell (two cells are neighboring if they share a side). In order to destroy the tank, the pilot needs to hit the tank twice. The pilot has no information about the outcome of his shots. Find the least number of shots sufficient to destroy the tank for sure.

S. Berlov, A. Magazinov, All Russian MO, 2015 Grade 9, Day 2, Pb 2

Solution: Color the grid like a chessboard, with the corners being white. If you bomb all the black squares, followed by the white squares, followed by the black squares again, this guarantees destroying the tank, for a total of 2521 shots. To show this is best, note that given any pair of adjacent squares A, B , your shots must either fire on B then A then B (not necessarily consecutively) or A then B then A . This is the only way to account for both possibilities that the tank starts

in A and is destroyed on B or starts in B and is destroyed on A . In particular, for any pair of adjacent squares, one of them must be shot twice. The least number of squares you can shoot twice while still hitting every adjacent pair of squares are the black squares in your coloring. (Put 840 dominoes on the board, each covering two neighboring squares. One cell remains uncovered. One of the cells covered by each domino requires one shot, the other one two shots. The uncovered cell requires one shot, so $3 \cdot 840 + 1 = 2521$ shots are necessary.)