Problema săptămânii 101

Aflaţi valoarea minimă a expresiei $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b-1}$ după toate numerele reale $a > b > 1$ care verifică

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 \leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Fehmi Emre Kadan, a 22-a Olimpiadă de Matematică pentru Juniori, Turcia, 16.12.2017

Solutia 1: (oficială)
Din inegalitatea dată rezultă: $0 \geq (ab+1)^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1) = a^2b^2 + 4ab + 1 - 2a^3 - 2b^3 + a^2 + b^2 - 2a - 2b = (a^2 - 2b + 1)(b^2 - 2a + 1)$.
Cum $a > b$, obţinem $a^2 - 2b + 1 > a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$, deci $b^2 - 2a + 1 \leq 0$.
Prin urmare, avem $(b-1)^2 \leq 2(a-b)$ adică

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Egalitatea se atinge pentru $(a, b) = \left(\dfrac{5}{2},\ 2\right)$, deci minimumul căutat este $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Soluţia 2: (*David Andrei Anghel*)
Rescriem inegalitatea din enunţ astfel

$$\frac{(a-1)^2(b-1)^2}{(a-b)^2} \leq 2(a+b).$$

Notând $\dfrac{(a-1)^2}{a-b} = x$, $\dfrac{(b-1)^2}{a-b} = y$, avem $x > y > 0$ şi $xy - 2x + 2y = \dfrac{(a-1)^2(b-1)^2}{(a-b)^2} - \dfrac{2[(a-1)^2 - (b-1)^2}{a-b} = \dfrac{(a-1)^2(b-1)^2}{(a-b)^2} - 2(a+b) + 4 \leq 4$, deci $(x+2)(y-2) \leq 0$. Cum $x + 2 \geq 0$, rezultă $y - 2 \leq 0$, de unde rezultă că $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b-1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Egalitatea se atinge pentru $(a, b) = (5, 3)$, deci minimumul căutat este $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarcă: (*Carmen-Victoriţa Chirfot*)
De fapt egalitatea are loc pentru orice pereche (a, b) cu $b^2 = 2a - 1$, $a > 1$.

Problem of the week no. 101

Find the minimal possible value of $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b-1}$ over all real numbers $a > b > 1$ satisfying

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 \leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Fehmi Emre Kadan, 22nd Junior Turkish MO, dec. 16, 2017

Solution 1:
Using the given inequality, we get $0 \geq (ab+1)^2+(a+b)^2-2(a+b)(a^2-ab+b^2+1) = a^2b^2+4ab+1-2a^3-2b^3+a^2+b^2-2a-2b = (a^2-2b+1)(b^2-2a+1)$.
Since $a > b$, we get $a^2-2b+1 > a^2-2a+1 = (a-1)^2 \geq 0$, hence $b^2-2a+1 \leq 0$.
Therefore, we have $(b-1)^2 \leq 2(a-b)$ or

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

The equality holds at $(a,b) = \left(\frac{5}{2},\ 2\right)$, so the desired minimum is $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution 2: (*David Andrei Anghel*)
Rewrite the given inequality as

$$\frac{(a-1)^2(b-1)^2}{(a-b)^2} \leq 2(a+b).$$

Denoting $\frac{(a-1)^2}{a-b} = x$, $\frac{(b-1)^2}{a-b} = y$, we have $x > y > 0$ and $xy - 2x + 2y = \frac{(a-1)^2(b-1)^2}{(a-b)^2} - \frac{2[(a-1)^2-(b-1)^2}{a-b} = \frac{(a-1)^2(b-1)^2}{(a-b)^2} - 2(a+b) + 4 \leq 4$, hence $(x+2)(y-2) \leq 0$. As $x+2 \geq 0$, it follows that $y-2 \leq 0$, therefore $\frac{\sqrt{a-b}}{b-1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
The equality holds at $(a,b) = (5,3)$, so the desired minimum is $\frac{1}{\sqrt{2}}$.