Problema săptămânii 100

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, H ortocentrul său, iar T_A, T_B, T_C picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C. Fie P punctul de intersecţie a dreptelor T_AT_C şi BT_B. Perpendiculara din P pe BC intersectează dreapta AB în Q. Dacă dreptele AT_A şi QT_B se intersectează în punctul N, demonstraţi că N este mijlocul segmentului $[AH]$.

baraj OIM, Ungaria

Soluţia oficială 1:

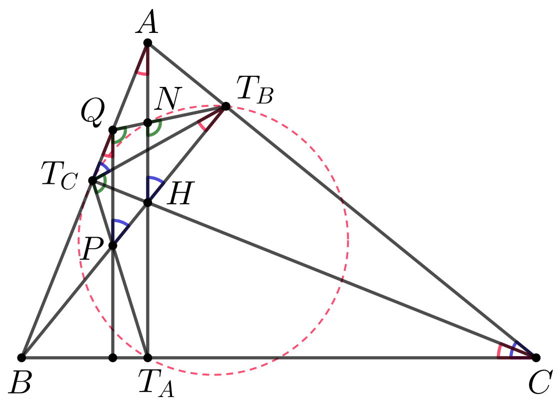
Cum AT_CHT_B este patrulater inscriptibil, folosind că $PQ \parallel AT_A$, deducem că $\sphericalangle T_CQP \equiv \sphericalangle T_CAH \equiv T_CT_BH \equiv \sphericalangle T_CT_BP$, de unde rezultă că şi patrulaterul QT_CPT_B este inscriptibil.

Segmentul $[AC]$ se vede atât din punctul T_C cât şi din punctul T_A sub unghi drept, deci AT_CT_AC este tot inscriptibil.

Astfel $m(\sphericalangle QT_CP) = m(\sphericalangle AT_CT_A) = 180° - m(\sphericalangle C)$ şi, cum QT_CPT_B este inscriptibil, rezultă că $m(\sphericalangle QT_BP) = m(\sphericalangle C)$.

De aici rezultă că triunghiul AT_BN este isoscel căci $m(\sphericalangle T_BAN) = m(\sphericalangle CAT_A) = 90° - m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle AT_BH) - m(\sphericalangle QT_BP) = m(\sphericalangle AT_BN)$.

Însă T_B se află pe cercul de diametru $[AH]$, iar N este un punct de pe $[AH]$ pentru care $NA = NT_B$, lucru care se întâmplă dacă şi numai dacă N este mijlocul lui $[AH]$.



Soluţia oficială 2:

Din asemănarea triunghiurilor T_AAC şi T_BAH rezultă că $m(\sphericalangle T_BHA) = m(\sphericalangle C)$ aşa încât, din $PQ \parallel AT_A$, rezultă că $\sphericalangle T_BPQ \equiv \sphericalangle C$.

Deoarece patrulaterul T_BHT_CA este inscriptibil, deci $\sphericalangle T_BT_CQ \equiv \sphericalangle T_BT_CA \equiv \sphericalangle T_BHA \equiv \sphericalangle C$, de unde rezultă că T_BPT_CQ este inscriptibil.

Acum arătăm că N se află pe cercul circumscris triunghiului $T_AT_BT_C$ care nu este altul decât cercul lui Euler. Să demonstrăm aşadar că patrulaterul $T_AT_CNT_B$ este inscriptibil: avem $\sphericalangle T_AT_CT_B \equiv \sphericalangle PT_CT_B \equiv \sphericalangle PQT_B \equiv \sphericalangle T_ANT_B$.

Se ştie că cercul lui Euler conţine mijloacele segmentelor care unesc ortocentrul cu vârfurile triunghiului. De aici rezultă că N înjumătăţeşte segmentul $[AH]$.

Soluţia 3: (*Radu Lecoiu*)
Fie Q şi R punctele în care dreapta PQ intersectează dreptele BC, respectiv AC. Folosind $PQ \parallel AT_A$ şi AT_CT_AC inscriptibil, obţinem $\sphericalangle ACT_C \equiv \sphericalangle AT_AP \equiv \sphericalangle T_APR \equiv \sphericalangle QPT_C$, de unde rezultă că patrulaterul CPT_CS este inscriptibil şi, deci, $\sphericalangle PST_C \equiv \sphericalangle PCT_C$.
Din $SR \perp BC$ şi $BP \perp CS$ rezultă că P este ortocentrul triunghiului CBS, deci $\sphericalangle SCP \equiv \sphericalangle SBT_B$ (complementare cu $\sphericalangle CSB$). Dar $\sphericalangle ACT_C \equiv \sphericalangle ABT_B$ (complementare cu $\sphericalangle BAC$), deci, prin scădere, $\sphericalangle T_CCP \equiv \sphericalangle T_CBS$.
Aşadar $\sphericalangle T_CCP \equiv \sphericalangle T_CBS \equiv \sphericalangle PST_C$. Rezultă că SQ este tangentă cercului circumscris triunghiului BT_CS. Obţinem că $QS^2 = QT_C \cdot QB$. Dar $\sphericalangle QPT_C \equiv \sphericalangle QBP$, ceea ce arată că QP este tangentă cercului circumscris triunghiului BT_CP, de unde obţinem că $QP^2 = QT_C \cdot QB$. Aşadar, $QS = QP$, iar din triunghiul T_BSP, în care $AH \parallel SP$ şi $QS = QP$, rezultă că $AN = NH$.

Am primit mai multe soluţii calculatorii (*Cezar Tulceanu, David Andrei Anghel*). O prezentăm pe cea dată de *Titu Zvonaru* pentru că ea foloseşte un rezultat interesant (relaţia (2)), util de ştiut.

Soluţia 4: (*Titu Zvonaru*)
Deoarece triunghiurile BT_AH şi BT_BC suntasemenea,avem

$$\frac{BT_A}{BT_B} = \frac{HT_A}{CT_B} \qquad (1).$$

Folosind rapoarte de arii, relaţia (1) şi faptul că $\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg}(\sphericalangle HCTB) = \dfrac{HT_B}{CT_B}$, obţinem

$$\frac{PH}{PB} = \frac{[PHT_A]}{[PBT_A]} = \frac{HT_A \sin(\sphericalangle HT_AT_C}{BT_A \sin(\sphericalangle BT_AT_C)} = \frac{HT_A \cos A}{BT_A \sin A} = \frac{CT_B \cos A}{BT_B \sin A} = \frac{HT_B}{BT_B} \quad (2).$$

Notăm cu H_B simetricul lui H faţă de T_B. Din (1) şi (2) rezultă că

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{HP}{PB} = \frac{HT_B}{BT_B} = \frac{T_BH_B}{BT_B},$$

de unde rezultă că $QT_B \parallel AH_B$. Deducem că NT_B este linie mijlocie în triunghiul AH_BH, deci N este mijlocul segmentului $[AH]$.

În fine, *Titu Zvonaru* ne propune şi următoarea generalizare surprinzătoare a problemei săptămânii 100:

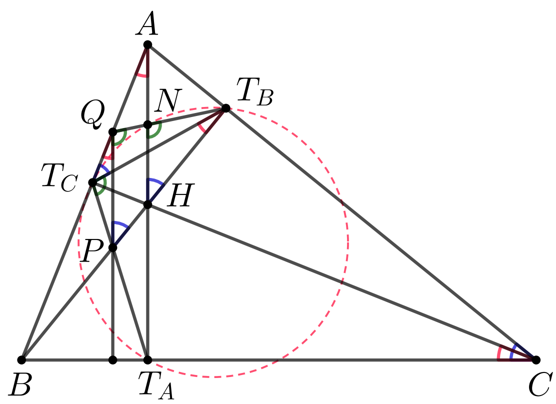
Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi AT_A, BT_B, CT_C trei ceviene concurente într-un punct M. Fie P punctul de intersecţie a dreptelor T_AT_C şi BT_B. Paralela prin P

la AT_A intersectează dreapta AB în Q. Dacă dreptele AT_A şi QT_B se intersectează în punctul N, demonstraţi că N este mijlocul segmentului $[AM]$.

Problem of the week no. 100
Let ABC be an acute triangle, H its orthocenter, and T_A, T_B, T_C the feet of the altitudes from A, B, and C, respectively. Let P be the intersection point of the lines T_AT_C and BT_B. The perpendicular through P to BC meets the line AB at Q. If N is the intersection points of lines AT_A and QT_B, prove that N is the midpoint of the line segment AH.

TST Hungary

Official solution 1:
As the quadrilateral AT_CHT_B is cyclic, using the fact that $PQ \parallel AT_A$, we deduce that $\sphericalangle T_CQP = \sphericalangle T_CAH = T_CT_BH = vaaT_CT_BP$, which shows that the quadrilateral QT_CPT_B is also cyclic.
The line segment AC is seen both from T_C and T_A under a right angle, hence AT_CT_AC is a cyclic quadrilateral as well.
Thus $\sphericalangle QT_CP = \sphericalangle AT_CT_A = 180° - \sphericalangle C$ and, since QT_CPT_B is cyclic, it follows that $\sphericalangle QT_BP = \sphericalangle C$.
It follows that the triangle AT_BN is isosceles because $\sphericalangle T_BAN = \sphericalangle CAT_A = 90° - \sphericalangle C = \sphericalangle AT_BH - \sphericalangle QT_BP = \sphericalangle AT_BN$.
But T_B lies on the circle of diameter AH, and N is a point on the line segment AH for which $NA = NT_B$, which is a property that only the midpoint of AH has. Thus, N is the midpoint of the line segment AH.



Official solution 2:
From the similarity of triangles T_AAC and T_BAH it follows that $\sphericalangle T_BHA = \sphericalangle C$ and, from $PQ \parallel AT_A$, it follows that $\sphericalangle T_BPQ = \sphericalangle C$.
As the quadrilateral T_BHT_CA is cyclic, we have $\sphericalangle T_BT_CQ = \sphericalangle T_BT_CA = \sphericalangle T_BHA = \sphericalangle C$, which shows that T_BPT_CQ is cyclic.

Now we show that N lies on the circumcircle of triangle $T_AT_BT_C$ which is actually the Feuerbach circle (or Euler circle) of triangle ABC. Let us prove that the quadrilateral $T_AT_CNT_B$ is cyclic: we have $\sphericalangle T_AT_CT_B = \sphericalangle PT_CT_B = \sphericalangle PQT_B = \sphericalangle T_ANT_B$. It is knows that the Feuerbach circle passes through the midpoints of the line segments joining the orthocenter to te vertices of the triangle. It follows that N is the midpoint of the line segment AH.

A very interesting extension is proposed by *Titu Zvonaru*:

Let M be a point in the interior of the acute triangle ABC. Lines AM, BM, CM meet the sides BC, CA, AB at T_A, T_B and T_C, respectively. Lines T_AT_C and BT_B meet at P. The line parallel through P to AT_A intersects the line AB at Q. If AT_A and QT_B intersect at Q, prove that N is the midpoint of the line segment AM.