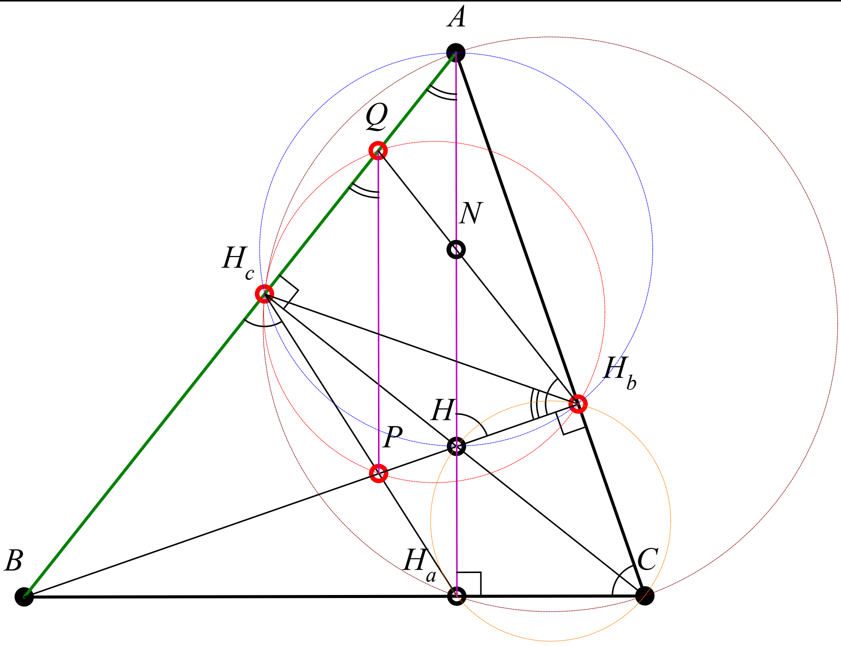
**Problema săptămânii 100:**

> **Fie $ABC$ – un triunghi ascuţitunghic, $H$ – ortocentrul său; iar $H_a, H_b$ şi $H_c$ – picioarele înălţimilor sale, duse din vârfurile $A, B$ şi respectiv $C$. Notăm cu: $\{P\} = H_aH_c \cap BH_b$, cu $Q$ – punctul de intersecţie al dreptei $AB$ cu perpendiculara dusă prin punctul $P$, pe dreapta $BC$; iar cu $\{N\} = AH_a \cap QH_b$. Demonstraţi că $N$ – este mijlocul segmentului $[AH]$.**




**SOLUTIE (*Mihai Miculiţa*):** Voi redefini punctele $N$ ca mijlocul segmentului $[AH]$ şi punctul $\{Q\} = AB \cap NH_b$. Pentru a arăta că punctul $Q$ – coincide cu punctul cu acelaşi nume din ipoteza problemei, este suficient să arătăm că: $PQ \perp BC \Leftrightarrow \boxed{PQ \parallel AH_a}$!

Avem:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} HH_b \perp AH_b \\ [NH] \equiv [NA] \end{array}\right\} \Rightarrow [NH_b] \equiv [NH] \Rightarrow \widehat{PH_bQ} \equiv \underline{\widehat{NHH_b}} \\ \left.\begin{array}{l} HH_a \perp H_aC \\ HH_b \perp H_aC \end{array}\right\} \Rightarrow HH_aCH_b - inscriptibil \Rightarrow \underline{\widehat{NHH_b}} \equiv \underline{\underline{\widehat{H_aCA}}} \\ \left.\begin{array}{l} AH_a \perp H_aC \\ CH_c \perp H_cA \end{array}\right\} \Rightarrow AH_cH_aC - inscriptibil \Rightarrow \underline{\underline{\widehat{H_aCA}}} \equiv \widehat{BH_cH_a} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{PH_bQ} \equiv \widehat{BH_cH_a} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow PH_bQH_c - inscriptibil \Rightarrow \widehat{PQH_c} \equiv \widehat{PH_bH_c} \\ \left.\begin{array}{l} HH_c \perp AH_c \\ HH_b \perp H_bA \end{array}\right\} \Rightarrow AH_cHH_b - inscriptibil \Rightarrow \widehat{PH_bH_c} \equiv \widehat{HAH_c} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{PQH_c} \equiv \widehat{HAH_c} \Rightarrow \boxed{PQ \parallel AH_a}. \blacksquare$$