Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$105^x + 211^y = 106^z.$$

Soluţie:

Avem $105^x \equiv 1 \pmod 8$, $211 \equiv 3 \pmod 8$, deci $211^y \equiv 1, 3 \pmod 8$. Atunci $105^x + 211^y \equiv 2 \pmod 8$ pentru y impar, şi $105^x + 211^y \equiv 4 \pmod 8$ dacă y este par.

Obţinem astfel că $z \leq 2$, căci, dacă am avea $z > 2$, ar rezulta că $106^z \equiv 0 \pmod 8$, evident fals.

Se verifică uşor că pentru $z = 0$ nu avem soluţii, iar dacă $z = 1$ avem doar soluţia $x = 1$, $y = 0$.

Pentru $z = 2$ rezultă $y = 0$ sau $y = 1$. deoarece $y < z$. Dacă $y = 0$ nu obţinem soluţii, iar dacă $y = 1$ rezultă $x = 2$.

Aşadar ecuaţia are două soluţii: $x = z = 1$, $y = 0$ şi $x = z = 2$, $y = 1$.

Problema 2. Dacă $a, b \geq 0$ şi $a^3 + b^3 \geq 2$ atunci

$$a^2 + b^2 \geq a + b.$$

Mircea Lascu, Marius Stănean

Soluţie:
Arătăm că $2(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)(a + b)^3$. (Practic ,,omogenizăm", adică facem ca expresiile din cei doi membri să fie de acelaşi ,,grad", 6.) De aici concluzia rezultă uşor: $2(a^2+b^2)^3 \geq (a^3+b^3)(a+b)^3 \geq 2(a+b)^3 \Rightarrow (a^2+b^2)^3 \geq (a + b)^3 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq a + b$.

Inegalitatea de mai sus revine la $(a - b)^4(a^2 + ab + b^2) \geq 0$, evident adevărată.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = 1$.

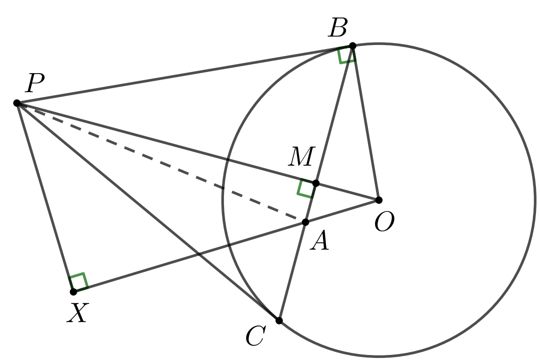
Cum se ajunge la descompunerea de mai sus?

După desfacerea parantezelor, inegalitatea de demonstrat revine la $a^6 - 3a^5b + 3a^4b^2 - 2a^3b^3 + 3a^2b^4 - 3ab^5 + b^6 \geq 0$. Observăm că expresia este simetrică în a şi b şi că avem egalitate dacă $a = b$. Forţăm atunci factorul comun $a - b$:
$a^6 - 3a^5b + 3a^4b^2 - 2a^3b^3 + 3a^2b^4 - 3ab^5 + b^6 = a^6 - a^5b - 2a^5b + 2a^4b^2 + a^4b^2 - a^3b^3 - a^3b^3 + a^2b^4 + 2a^2b^4 - 2ab^5 - ab^5 + b^6 = (a - b)(a^5 - 2a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + 2ab^4 - b^5) = (a - b)[a^3(a^2 - 2ab + b^2) - b^3(a^2 - 2ab + b^2)] = (a - b)^3(a^3 - b^3) = (a - b)^4(a^2 + ab + b^2)$.

Problema 3. Fie A un punct în interiorul unui cerc, diferit de centrul cercului. Considerăm toate coardele care trec prin A, cu excepţia diametrului care trece prin A. Determinaţi locul geometric al intersecţiei perechilor de tangente la cercul dat în capetele fiecărei coarde.

Soluţie:
Fie O centrul şi R raza cercului. Considerând câteva poziţii particulare ale coardei intuim că locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe dreapta OA (sau parte a unei asemenea drepte). Fie $[BC]$ o coardă variabilă care trece prin A şi M mijlocul ei. Notăm cu P intersecţia tangentelor în B şi C la cerc. Atunci $PO^2-PA^2 = R^2+PB^2-PA^2 = R^2+MB^2-MA^2 = 2R^2-OA^2$ care este constant (nu depinde de coarda aleasă). Fie X proiecţia punctului P pe OA. Atunci $XO^2 - XA^2 = PO^2 - PA^2 = 2R^2 - OA^2 > 0$ (pentru că $OA < R$), deci $XO > XA$ şi $(XO - XA)(XO + XA) = 2R^2 - OA^2$, adică $OA(2XA + OA) = 2R^2 - OA^2$. Rezultă că XA este constant şi, cum $X \in OA \setminus (OA$, X este fix, nu depinde de poziţia punctului P. Aşadar orice punct P cu proprietatea din enunţ se găseşte pe perpendiculara în X pe OA.

Reciproc, arătăm că orice punct de pe această dreaptă aparţine locului geometric.
Fie X ca mai sus şi P un punct oarecare de pe perpendiculara în X pe OA. Tangentele din P la cerc intersectează cercul în B şi C. Fie M proiecţia lui A pe PO. Arătăm că A în BC. Avem $PO^2 - PA^2 = XO^2 - XA^2 = 2R^2 - OA^2 = 2R^2 - AM^2 - OM^2$. Dar $PO^2 - PA^2 = R^2 + PB^2 - PA^2 = R^2 + PB^2 - PM^2 - AM^2$, deci $R^2 - OM^2 = PB^2 - PM^2$, ceea ce arată că $BM \perp OP$, cu alte cuvinte $B \in AM$ (A şi B se află pe perpendiculara în M pe OP). Analog rezultă $C \in AM$, de unde rezultă $A \in BC$, deci locul geometric căutat este drepta perpendiculară în X pe OA.



Problema 4. **a)** Există pentru orice număr raţional $\frac{a}{b}$ nişte numere raţionale $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ şi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a}{b}$?
b) Există pentru orice număr raţional $\frac{a}{b}$ nişte numere raţionale $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a}{b}$ şi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$?

Olimpiadă Kazahstan, 2013

Soluţie:
a) Dacă $\frac{a}{b} > 0$, putem presupune $a, b > 0$ şi lua numerele $2b, \frac{1}{2b}, \dots, 2b, \frac{1}{2b}$ (câte $2a$ din fiecare) şi -1 de $4ab$ ori. Produsul numerelor va fi 1, iar suma lor va fi $2a\left(2b + \frac{1}{2b}\right) - 4ab = \frac{a}{b}$.
Dacă $\frac{a}{b} < 0$, alegem scrierea găsită mai sus pentru $-\frac{a}{b} > 0$ şi schimbăm semnul la fiecare dintre numerele alese. Fiind un număr par de numere, suma îşi schimbă semnul, iar produsul rămâne egal cu 1. În fine, pentru $\frac{a}{b} = 0$ putem lua $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$.
b) Alegând unul dintre numere egal cu $\frac{a}{b}$, celelalte trebuie să aibă produsul 1 şi suma $1 - \frac{a}{b}$. Conform punctului **a)**, putem alege celelalte numere în mod convenabil.