Problema 1. Determinaţi numerele prime p şi q pentru care $p^2+3pq+q^2$ este pătrat perfect.

Soluţie:

Fie $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p^2 + 3pq + q^2 = r^2$. Dacă $p \neq 3$ şi $q \neq 3$, atunci am avea $p^2 + 3pq + q^2 \equiv 2(\bmod 3)$, fals deoarece $r^2 \not\equiv 2(\bmod 3)$.

Fie deci $p = 3$, de unde se obţine ecuaţia $q^2 + 9q + 9 = r^2$, sau

$$(2q - 2r + 9)(2q + 2r + 9) = 45.$$

Rezultă $2q + 2r + 9 = 15$ sau $2q + 2r + 9 = 45$, de unde $q + r = 3$, fals sau $q + r = 18$ şi $2q - 2r + 9 = 1$, adică $q = 7$.

Aşdar, din simetrie, avem soluţiile: $p = 3$, $q = 7$ şi $p = 7$, $q = 3$.

Problema 2. Dacă $a, b, c > 0$ şi $abc = 1$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4} + \frac{b^2+c^2}{b^4+c^4} + \frac{c^2+a^2}{c^4+a^4} \leq a + b + c.$$

Soluţie:

Din inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică, $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, aplicată numerelor $x = a^2 > 0$ şi $y = b^2 > 0$, rezultă $2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2$ şi cum $(a^2 + b^2)^2 \geq 2ab(a^2 + b^2)$, se obţine $2(a^4 + b^4) \geq 2ab(a^2 + b^2)$, adică

$$\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4} \leq \frac{1}{ab},$$

şi analoagele.

Sumând acum ciclic cele trei inegalităţi de tipul anterior va rezulta că

$$\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4} + \frac{b^2+c^2}{b^4+c^4} + \frac{c^2+a^2}{c^4+a^4} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = a + b + c.$$

Cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema 3. Fie M mijlocul laturii $[AC]$ a triunghiului ABC. Dacă există punctul $N \in (BM)$ astfel încât $\angle BAN \equiv \angle BCN$, atunci arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

Sorana Ionescu, Slobozia

Soluţie:

Fie T şi P simetricele punctelor B şi respectiv N faţă de punctul M.

Atunci patrulaterele $ABCT$ şi $ANCP$ sunt paralelograme. Deci $AB = CT$, $BN = TP$ şi $\angle ABN \equiv \angle CTP$; prin urmare triunghiurile ABN şi CTP sunt congruente (L.U.L.). Aşadar $\angle BAN \equiv \angle BCN \equiv \angle TCP$.

Deci, în triunghiul BCT, CN şi CP sunt izogonale şi, din teorema lui Steiner, obţinem

$$\frac{BN}{TN} \cdot \frac{BP}{TP} = \frac{BC^2}{CT^2},$$

de unde rezultă $\frac{BC^2}{CT^2} = 1$ şi prin urmare $BC = CT$. Cum aveam şi $AB = CT$ concluzionăm că $AB = BC$, adică triunghiul ABC este isoscel.

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Se consideră $2n$ bile. Pe fiecare din aceste bile este scris câte un număr. Presupunem că, oricum am grupa aceste $2n$ bile în n perechi, există două perechi care au aceeaşi sumă.
(a) Arătaţi că pe patru dintre bile este scris acelaşi număr.
(b) Arătaţi că pe bile sunt scrise cel mult $n - 1$ numere distincte.

baraj Franţa, 2018

Soluţie:
(a) Dacă pe bile sunt scrise numerele $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{2n}$, formăm perechile $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$, ... , $\{a_{2n-1}, a_{2n}\}$. Evident, avem $a_1 + a_2 \leq a_3 + a_4 \leq \ldots \leq a_{2n-1} + a_{2n}$. Cum printre sume există două egale, vor exista şi două consecutive egale, $a_{2j-1} + a_{2j} = a_{2j+1} + a_{2j+2}$. Dar cum $a_{2j-1} \leq a_{2j} \leq a_{2j+1} \leq a_{2j+2}$, rezultă că trebuie să avem egalitate peste tot adică $a_{2j-1} = a_{2j} = a_{2j+1} = a_{2j+2}$.
(b) Presupunem că ar exista n valori distincte $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ scrise pe bile. Aranjăm şi celelalte numere (egale sau nu cu celelalte n) în ordine crescătoare: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$. Formând grupele $\{b_1, c_1\}$, $\{b_2, c_2\}$, ... , $\{b_n, c_n\}$, obţinem sumele distincte $b_1 + c_1 < b_2 + c_2 < \ldots < b_n + c_n$, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar putem avea cel mult $n-1$ valori distincte.