Problema 1. Fie n un număr natural astfel încât $n+1$ se divide cu 24. Arătaţi că suma divizorilor lui n este divizibilă cu 24.

Soluţie: Avem $n \equiv -1 \pmod{24}$, deci divizorii lui n sunt de forma:

$$d \equiv \pm 1 \pmod{12} \quad \text{sau} \quad d \equiv \pm 5 \pmod{12},$$

adică $d^2 \equiv 1 \pmod{24}$. Un pătrat perfect nu este congruent cu -1 modulo 24 (sau modulo 3), deci n nu este pătrat perfect. Deducem că putem grupa divizorii lui n în perechi de forma $\left(d, \frac{n}{d}\right)$ în care $d \neq \frac{n}{d}$. Atunci suma divizorilor lui n este:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n,\, d<\sqrt{n}} \left(d + \frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n,\, d<\sqrt{n}} \frac{n+d^2}{d}\,.$$

Cum $n + d^2 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{24}$ şi $(d; 24) = 1$, rezultă, în final, că $24 \mid \sigma(n)$.

Problema 2. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$. Demonstraţi că

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Soluţia 1:
Pentru orice $x, y > 0$ avem

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2 \qquad (1)$$

(din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz sau observând că inegalitatea revine după efectuarea calculelor la inegalitatea evidentă $x^2+y^2 \geq 2xy$, satisfăcută cu egalitate dacă $x = y$).

Folsind (1) pentru $x = a^2$ şi $y = b^2$ obţinem $(1+a^4)(1+b^4) \geq (1+a^2b^2)^2$, cu egalitate dacă $a = b$. Analog se obţin relaţiile $(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+b^2c^2)^2$ şi $(1+c^4)(1+a^4) \geq (1+c^2a^2)^2$. Înmulţind aceste trei relaţii obţinem

$$[(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)]^2 \geq [(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)]^2. \qquad (2)$$

Folosind acum (1) pentru $x = ab$, $y = bc$ şi condiţia $abc = 1$ obţinem

$$(1+a^2b^2)(1+b^2c^2) \geq (1+ab\cdot bc)^2 = (1+b)^2.$$

Analog se obţin inegalităţile $(1+b^2c^2)(1+c^2a^2) \geq (1+c)^2$ şi $(1+c^2a^2)(1+a^2b^2) \geq (1+a)^2$. Înmulţind aceste inegalităţi obţinem

$$[(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)]^2 \geq [(1+a)(1+b)(1+c)]^2, \qquad (3)$$

care combinat cu (2) conduce la

$$[(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)]^2 \geq [(1+a)(1+b)(1+c)]^2,$$

de unde rezultă inegalitatea din enunţ.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Soluţia 2:
Desfacem parantezele, folosim că $abc=1$ şi reducem termenii asemenea. Ajungem la $a^4+b^4+c^4+(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4 \geq a+b+c+ab+bc+ca$. Dar folosind inegalitatea cunoscută $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ mai întâi pentru $x=A^2$, $y=B^2$, $z=C^2$, apoi pentru $x=AB$, $y=BC$, $z=CA$ obţinem $A^4+B^4+C^4 \geq$

$$(AB)^2+(BC)^2+(CA)^2 \geq AB\cdot BC+BC\cdot CA+CA\cdot AB = ABC(A+B+C).$$

Folosind această relaţie pentru $A=a$, $B=b$, $C=c$ şi apoi pentru $A=ab$, $B=bc$, $C=ca$, obţinem $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)=a+b+c$ şi $(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4 \geq (abc)^2(ab+bc+ca)=ab+bc+ca$ care adunate conduc la inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

În încheiere vă propunem şi următoareageneralizare: arătaţi că dacă $n\in\mathbb{N}$ şi a,b,c sunt numere reale pozitive astfel încât $abc=1$, atunci

$$(1+a^{n+1})(1+b^{n+1})(1+c^{n+1}) \geq (1+a^n)(1+b^n)(1+c^n).$$

Problema 3. În tetraedrul $MATE$ există punctele coplanare B,C,F,G, $B\in(ME)$, $C\in(AM)$, $F\in(AT)$, $G\in(ET)$, astfel încât $\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{EG}{GT}$ şi $AF=FT$. Arătaţi că ariile triunghiurilor BCF şi BGF sunt egale.

Mihaela Berindeanu

Soluţie:
Fie $\alpha=(BCFG)$ şi $\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{EG}{GT}=k$.
Din teorema lui Menelaus în spaţiu rezultă că $\dfrac{MC}{AC}\cdot\dfrac{AF}{FT}\cdot\dfrac{GT}{EG}\cdot\dfrac{BE}{MB}=1$.

Ţinând cont că $\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{EG}{GT}$ şi $\dfrac{AF}{FT}=1$ rezultă că $\dfrac{MB}{BE}=1$, adică $MB=BE$.

Rezultă atunci că $d(M,\alpha)=d(E,\alpha)$, deci concluzia este echivalentă cu a arăta egalitatea volumelor $v(MCBF)$ şi $v(EBGF)$.

Deoarece $AF = FT$, avem

$$v(MEFT) = v(MEAF) = \frac{1}{2}\,v(MATE) \qquad (1).$$

Cum $\dfrac{\mathscr{A}_{EFG}}{\mathscr{A}_{ETF}} = \dfrac{EG}{ET} = \dfrac{k}{k+1}$, iar $BM = BE$, rezultă că

$$d\big(M,(AET)\big) = 2 \cdot d\big(B,(AET)\big),$$

deci

$$\frac{v(BEFG)}{v(METF)} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Avem $\dfrac{MC}{CA} = k \Rightarrow \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{k}{k+1}$ şi $\dfrac{MB}{ME} = \dfrac{1}{2}$, deci $\dfrac{\mathscr{A}_{MBC}}{\mathscr{A}_{MAE}} = \dfrac{k}{k+1} \cdot \dfrac{1}{2}$.
Înălţimea din F fiind aceeaşi, rezultă că

$$\frac{v(MCBF)}{v(MAEF)} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă $v(BEFG) = v(MCBF)$, de unde concluzia.

Problema 4. Fie M o mulţime formată din şase numere naturale nenule a căror sumă este 60. Aceste numere sunt scrise pe feţele unui cub, câte un singur număr pe fiecare faţă. O *mutare* constă din a alege unul din vârfurile cubului şi a aduna 1 la numerele scrise pe cele trei feţe care conţin respectivul vârf. Pentru câte mulţimi M este posibil ca, după o succesiune de asemenea *mutări*, să facem ca numerele scrise pe cele şase feţe ale cubului să fie egale?

Olimpiadă Cehia, 2011

Soluţie:
Fie $ABCDA'B'C'D'$ cubul. Notăm cu a suma dintre numerele scrise pe feţele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$, cu b suma numerelor scrise pe feţele $ABB'A'$ şi $CDD'C'$ şi cu c suma numerelor scrise pe feţele $ADD'A'$ şi $BCC'B'$. Iniţial avem $a+b+c = 60$. La fiecare mutare, a creşte cu 1, b creşte cu 1 şi c creşte cu 1. Într-adevăr, fiecare mutare afectează câte una din două feţe opuse. Pentru ca la final să putem obţine acelaşi număr pe fiecare faţă (lucru care implică $a = b = c$), este necesar ca şi la început să avem $a = b = c$, deci $a = b = c = 20$.

Reciproc, arătăm că această condiţie este suficientă: dacă suma numerelor de pe fiecare pereche de feţe opuse este 20, putem face ca toate numerele de pe feţe să devină egale. Iată cum. Să observăm că oricum am alege câte o faţă din fiecare pereche, cele trei feţe alese au un vârf comun, deci putem mări cu 1 numărul de pe fiecare din cele 3 feţe alese. Fie atunci m cel mai mare număr scris la început pe vreuna din feţe. Facem mutări până când obţinem m pe fiecare faţă. Alegem din fiecare pereche de feţe opuse câte una pe care este scris un număr mai mic ca m. (Când pe o faţă numărul scris a devenit m, facem numai operaţii care măresc numărul de pe faţa opusă acesteia). Cele trei feţe au un vârf comun, deci putem mări numerele de pe cele trei feţe alese cu 1. Nu putem rămâne fără mutări pentru că dacă dintr-o pereche nu mai putem alege nicio faţă, atunci pe fiecare din ele este scris m, deci suma numerelor scrise pe cele două feţe opuse este $2m$. Cum însă sumele pe perechile de feţe opuse sunt mereu egale, rezultă că şi sumele celelalte sunt tot $2m$, deci pe şi celelalte feţe este scris tot m. După $2m - 20$ de mutări toate numerele vor fi egale cu m. (Similar, am putea face ca după 20 de mutări pe fiecare faţă să fie scris numărul 20.)

Aşadar M este reuniunea a trei perechi disjuncte care au proprietatea că suma numerelor din fiecare pereche este 20. Perechile sunt trei din următoarele 9: $\{1, 19\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 17\}$, $\{4, 16\}$, $\{5, 15\}$, $\{6, 14\}$, $\{7, 13\}$, $\{8, 12\}$ şi $\{9, 11\}$. Trebuie să alegem trei dintre aceste perechi. În câte moduri putem face acest lucru?[1] Vă indicăm două moduri de a face numărarea:

1. Putem număra băbeşte după cel mai mic element ales:
- cu perechea $\{1, 19\}$ sunt $7 + 6 + \ldots + 1 = 28$ de alegeri (7 care au al doilea cel mai mic element 2, 6 care au al doilea cel mai mic element 3, etc)
- cu perechea $\{2, 18\}$ (dar fără $\{1, 19\}$) sunt $6 + 5 + \ldots + 1 = 21$ de alegeri (6 care au al doilea cel mai mic element 3, 5 care au al doilea cel mai mic element 3, etc)
- cu perechea $\{3, 17\}$ (adică mulţimi M care au cel mai mic element 3) sunt $5 + 4 + \ldots + 1 = 15$ de mulţimi (5 care conţin $3, 17, 4, 16$, apoi 4 care conţin $3, 17, 5, 15$, etc)
- şi aşa mai departe.
În final se obţin $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$ de mulţimi M.

2. Putem folosi regula produsului:
prima pereche, A, poate fi aleasă în 9 moduri, cea de-a doua, B, în 8 moduri (din cele 8 perechi rămase), iar a treia pereche, C, în 7 moduri. Sunt $9 \cdot 8 \cdot 7$ moduri de a face alegerea, însă deoarece $A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = C \cup A \cup B = C \cup B \cup A$, sunt câte şase alegeri care conduc la aceeaşi mulţime M, deci numărul obţinut trebuie împărţit la 6. Rezultatul final este $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$.

[1] În clasa a X-a veţi învăţa că există $C_9^3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ de moduri de a alege perechile.