Problema 1. Numerele naturale a, b, c şi $a^4+b^4+c^4-3$ sunt prime. Arătaţi că $a^2+b^2+c^2-1$ este număr prim.

Soluţie:

Dacă $(a;3)=1$, atunci $3 \mid a^2-1$ şi deci $a^4 \equiv 1(\text{mod}3)$. Deci, dacă $(abc;3)=1$, atunci $3 \mid n=a^4+b^4+c^4-3$ şi deci $n \equiv 0(\bmod 3)$. Cum $n>3$ va rezulta că n este compus, fals.

Aşadar cel puţin unul din numerele prime a, b, c este egal cu 3. Din simetrie, putem presupune că $a=3$, deci $n=b^4+c^4+78$. Dacă b şi c ar fi ambele impare, atunci n ar fi par, şi cum $n>2$, am obţine că n nu este prim, fals. Prin urmare b şi c au parităţi diferite, şi cum ele sunt prime, din simetrie, putem presupune $b=2$. Rezultă $n=c^4+96$.

Dacă $(c;5)=1$, atunci am obţine că $5 \mid c^4-1$ şi atunci $n \equiv 0(\text{mod}5)$, adică este compus, fals.

Prin urmare $c=5$, $n=179$, de unde $m=a^2+b^2+c^2-1=37$, care este prim.

Problema 2. Dacă m şi n sunt numere naturale astfel încât $\sqrt{7}>\frac{m}{n}$, atunci are loc inegalitatea:

$$\sqrt{7}>\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}.$$

Soluţie: Din ipoteză rezultă $7n^2-m^2>0$. Vom arăta că următoarele egalităţi nu sunt posibile:

$$7n^2-m^2=1 \text{ şi } 7n^2-m^2=2.$$

Cum $m=7k+r$. cu $r \in \{0;\pm1;\pm2;\pm3\}$, rezultă că $m^2 \equiv 0;1;4(\bmod 7)$, prin urmare niciunul din numerele m^2+1 şi m^2+2 nu este divizibil cu 7, deci relaţiile anterioare nu pot fi posibile.

Aşadar $7n^2-m^2 \geq 3$, adică $\sqrt{7} \geq \frac{\sqrt{m^2+3}}{n}$.

Rămâne astfel de arătat că

$$\frac{\sqrt{m^2+3}}{n} \geq \frac{m^2+1}{mn},$$

relaţie echivalentă cu $3m^2 \geq 2m^2+1$, evident adevărată.

Problema 3. Pe latura $[AB]$ a pătratului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $m(\angle ADE) = 15°$. Se construieşte triunghiul echilateral ECF, al cărui interior conţine punctul D. Determinaţi măsura unghiului $\angle FDA$.

Adrian Bud, Negreşti Oaş

Soluţie:

Construim, în exteriorul pătratului, triunghiul echilateral EDM. Atunci $m(\angle MDE) = 75°$ şi $m(\angle CDE) = 75°$.

Prin urmare rezultă $\triangle DEM \equiv \triangle DEC$ (*L.U.L.*), deci $\angle EMD \equiv \angle ECD$. Avem $m(\angle AME) = 60° - m(\angle EMD)$ şi $m(\angle DCF) = 60° - m(\angle ECD)$, de unde $\angle AME \equiv \angle DCF$.

Din congruenţa $\triangle AEM \equiv \triangle DFC$ (*L.U.L.*) obţinem $\angle MAE \equiv \angle CDF$. Aşadar $m(\angle CDF) = m(\angle MAE) = m(\angle MAD) + m(\angle DAE) = 150°$.

Concluzionăm că $m(\angle FDA) = 120°$.

Problema 4. Suma numerelor nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_7$ este 1. Considerăm următoarele cinci sume: $x_1 + x_2 + x_3$, $x_2 + x_3 + x_4$, $x_3 + x_4 + x_5$, $x_4 + x_5 + x_6$, $x_5 + x_6 + x_7$. Notând cu M valoarea celei mai mari din aceste cinci sume, care este cea mai mică valoare posibilă a lui M?

Concursul ,,Arany Dániel", Ungaria, 2016

Soluţia 1: Valoarea minimă a lui M este $\frac{1}{3}$.

Ea se atinge dacă $x_1 = x_4 = x_7 = \frac{1}{3}$ şi celelalte numere sunt 0.

Presupunând că ar fi posibil ca $M < \frac{1}{3}$, am avea că fiecare din cele 5 sume este mai mică decât $\frac{1}{3}$. Cum $x_4 = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) - (x_5 + x_6 + x_7) > \frac{1}{3}$, contrazicem $x_2 + x_3 + x_4 < \frac{1}{3}$.

Soluţia 2: Să considerăm şi sumele ,,lipsă": $x_6 + x_7 + x_1$ şi $x_7 + x_2 + x_1$.
Avem că $x_6 + x_7 + x_1 \leq (x_5 + x_6 + x_7) + (x_1 + x_2 + x_3) \leq M + M = 2M$.
Analog, $x_7 + x_1 + x_2 \leq (x_5 + x_6 + x_7) + (x_1 + x_2 + x_3) \leq 2M$.
Atunci, pe de o parte, $(x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3 + x_4) + (x_3 + x_4 + x_5) + (x_4 + x_5 + x_6) + (x_5 + x_6 + x_7) + (x_6 + x_7 + x_1) + (x_7 + x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = 3$,
pe de altă parte, $(x_1+x_2+x_3)+(x_2+x_3+x_4)+(x_3+x_4+x_5)+(x_4+x_5+x_6)+(x_5+x_6+x_7)+(x_6+x_7+x_1)+(x_7+x_1+x_2) \leq M+M+M+M+M+2M+2M =$

$9M$.

Deducem că $9M \geq 3$, adică $M \geq \frac{1}{3}$. Din analizarea cazului de egalitate (adică rezolvarea sistemului $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5 = x_4 + x_5 + x_6 = x_5 + x_6 + x_7 = \frac{1}{3}$, $x_6 + x_7 + x_1 = x_7 + x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$) se constată că această valoare este atinsă dacă şi numai dacă $x_1 = x_4 = x_7 = \frac{1}{3}$, $x_2 = x_5 = x_3 = x_6 = 0$.

Prin urmare, valoarea minimă căutată a lui este $\frac{1}{3}$.