Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi p un număr prim impar astfel încât $n|p-1$ şi $p|n^3-1$. Demonstraţi că $4p-3$ este pătrat perfect.

Soluţie: Evident, $n-1<p \Rightarrow (n-1;p)=1$.

Cum $p|n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$, obţinem că $p|n^2+n+1$.

Vom demonstra că $p=n^2+n+1$.

Fie $p-1=qn$. Dacă $n \leq \sqrt{p}$, atunci $p \leq n^2+n+1 < 2p$, de unde $p=n^2+n+1$.

Dacă $n>\sqrt{p}$, atunci $q<\sqrt{p}$. Prin urmare

$$p|n^2+n+1=\frac{(p-1)^2}{q^2}+\frac{p-1}{q}+1=\frac{(p-1)^2+q(p-1)+q^2}{q^2}.$$

Număratorul ultimei fracţii este congruent cu $(-1)^2-q+q^2$ modulo p. Deoarece $(p;q)=1$, obţinem că $p|q^2-q+1$. Dar $q^2-q+1<p-q+1 \leq p$, contradicţie.

Aşadar $p=n^2+n+1$, de unde $4p-3=(2n+1)^2$.

Problema 2. Arătaţi că pentru orice numere reale pozitive a,b,c are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3} \geq \frac{9}{8(a+b+c)}.$$

* * *

Soluţia 1:

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz în forma prezentată în materialul teoretic, obţinem

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}=\frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{b+c}+\frac{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}{c+a}+\frac{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}{a+b} \geq$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{a+b+b+c+c+a}=\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{2(a+b+c)}.$$

Din inegalitatea lui Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \quad \forall\, a,b,c>0$$

rezultă atunci imediat inegalitatea dorită.

Inegalitatea lui Nesbitt se demonstrează cu inegalitatea din materialul teoretic, folosind ,,trucul" (prezentat la problema rezolvată nr. 3 din material)

de a amplifica fiecare fracţie cu numărătorul ei (pentru a face să apară pătrate la numărători).
Deorece în inegalitatea lui Nesbitt avem egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$, iar pentru $a = b = c$ avem egalitate şi în inegalitatea din enunţ, rezultă că inegalitatea din enunţ este satisfăcută cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Soluţia 2: Putem aplica inegalitatea lui *Hölder* în următoarea variantă: dacă $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 > 0$, atunci

$$(a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2 + c_2)(a_3 + b_3 + c_3) \geq (\sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3} + \sqrt[3]{c_1c_2c_3})^3.$$

Astfel, $(1 + 1 + 1)(a + b + c)\left(\dfrac{a^2}{(b+c)^3} + \dfrac{b^2}{(c+a)^3} + \dfrac{c^2}{(a+b)^3}\right) \geq$

$$\left(\sqrt[3]{1 \cdot a \cdot \frac{a^2}{(b+c)^3}} + \sqrt[3]{1 \cdot b \cdot \frac{b^2}{(c+a)^3}} + \sqrt[3]{1 \cdot c \cdot \frac{c^2}{(a+b)^3}}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)^3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

conform inegalităţii lui Nesbitt (vezi soluţia 1).
Împărţind cu $3(a + b + c)$ obţinem inegalitatea din enunţ.

Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi triunghiul BCD situate în plane perpendiculare. Fie M mijlocul segmentului $[AD]$ şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Dacă $DG \perp (MBC)$, demonstraţi că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.

Mircea Fianu

Soluţie:
Fie N mijlocul segmentului $[BC]$. Punctele A, G şi N sunt coliniare, iar $AN \perp BC$ (1).
Din $DG \perp (MBC)$ şi $BC \subset (MBC)$ rezultă $BC \perp DG$ (2).
Din (1) şi (2) rezultă că $BC \perp (AND)$, deci, în triunghiul BCD, dreapta DN este mediatoarea segmentului $[BC]$, prin urmare triunghiul BCD este isoscel, cu $DB = DC$.
În triunghiul dreptunghic AND avem $NM = \dfrac{AD}{2}$ (3).
Dacă P este mijlocul segmentului $[AG]$ şi $\{R\} = DG \cap MN$, atunci $[PM]$ este linie mijlocie în triunghiul ADG, de unde deducem că $[GR]$ este linie mijlocie în triunghiul MNP, deci R este mijlocul segmentului $[MN]$. Cum $DR \perp MN$, rezultă că triunghiul DMN este isoscel, cu $DN = DM = \dfrac{AD}{2}$

(4).
Din (3) şi (4) rezultă că triunghiul DMN este echilateral.
În fine, să observăm că triunghiurile ANC şi AND sunt congruente (CU) (avem $[AN]$ latură comună şi $m(\sphericalangle ACN) = m(\sphericalangle ADN) = 60°$), deci $ND = NC = \frac{BC}{2}$, adică triunghiul BCD este dreptunghic în D.

Alte variante pentru demonstrarea afirmaţiei ,,DG trece prin mijlocul lui $[MN]$":
1. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul AMN tăiat de transversala $D-R-G$ rezultă direct că $MR = NR$.
2. Dacă D' este simetricul lui D faţă de N, atunci DG trece prin mijlocul lui $[AD']$ (G este centrul de greutate al triunghiului ADD'), iar $MN \parallel AD'$ (linie mijlocie), deci DG trece şi prin mijlocul lui $[MN]$.

Problema 4. O bucată de caşcaval de formă cubică are o coajă pe fiecare din cele 6 feţe ale sale. Ea este tăiată prin 33 de tăieturi, fiecare din ele paralelă cu câte una din feţele cubului, în mai multe bucăţi în formă de paralelipiped dreptunghic. Ştiind că exact jumătate din bucăţile de caşcaval formate conţin coajă, aflaţi numărul total de bucăţi.

Concursul Náboj, 2016

A se vedea problema 53.
Soluţie:
Fie a, b, c numărul de tăieturi paralele cu feţele de sus şi jos, stânga şi dreapta, respectiv faţă şi spate ale cubului.
Se formează $(a+1)(b+1)(c+1)$ bucăţi de caşcaval. Pentru ca să existe bucăţi fără coajă trebuie ca $a, b, c > 1$. Numărul de bucăţi fără coajă este atunci $(a-1)(b-1)(c-1)$. Aşadar, condiţia din enunţ revine la $a+b+c = 33$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 2(a-1)(b-1)(c-1)$.
Ultima relaţie se scrie $abc - 3(ab+bc+ca) + a + b + c - 3 = 0$, adică $abc-3(ab+bc+ca)+30 = 0$, sau $abc-3(ab+bc+ca)+9(a+b+c)-27 = 240$, ceea ce revine la $(a-3)(b-3)(c-3) = 240$. Cazurile cu $a < 3$ (sau $b < 3$ sau $c < 3$) nu convin. Într-adevăr, $a = 2$ ar obliga $b = 2$, $c = 240$ (sau invers), ceea ce ar contrazice $a+b+c = 33$. Aşadar $(a-3)(b-3)(c-3) = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $(a-3)+(b-3)+(c-3) = 24$.
• Dacă numerele $a-3$, $b-3$, $c-3$ sunt toate trei pare, notând $a-3 = 2x$, $b-3 = 2y$, $c-3 = 2z$, trebuie să avem $xyz = 30$, $x+y+z = 12$. Exact unul dintre numerele x, y, z este divizibil cu 5. Dacă acesta ar fi 10, celelalte ar trebui să fie 1 şi produsul ar fi 10, nu 30. Aşadar unul din numere trebuie să fie 5, iar celelalte două să aibă produsul 6 şi suma 7, deci celelalte sunt 1 şi 6. Aşadar $\{x, y, z\} = \{1, 5, 6\}$, adică $\{a, b, c\} = \{5, 13, 15\}$, prin urmare numărul total de bucăţi de caşcaval este $(a+1)(b+1)(c+1) = 6 \cdot 14 \cdot 16 = 1344$.

• Dacă exact unul dintre numerele $a-3$, $b-3$, $c-3$ este par, atunci el trebuie să fie divizibil cu 16. Suma numerelor fiind 24, rezultă că numărul par este exact 16, iar celelalte două numere au produsul 15 şi suma 8, deci sunt 3 şi 5. Aşadar $\{a-3,\, b-3,\, c-3\} = \{3, 5, 16\}$, adică $\{a, b, c\} = \{6, 8, 19\}$, prin urmare numărul total de bucăţi de caşcaval este $(a+1)(b+1)(c+1) = 7 \cdot 9 \cdot 20 = 1260$.
În concluzie, problema are două soluţii: 1260 şi 1344.