Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$2^x - 3^y = 1.$$

Soluţie: Dacă $y = 0$ rezultă $x = 1$. Pentru $y \geq 1$ avem $1 + 3^y = 2^x$ şi modulo 3 obţinem că x este par, deci $x = 2u$, cu $u \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că

$$3^y = 2^{2u} - 1 = (2^u - 1)(2^u + 1),$$

deci $2^u - 1 = 3^a$, $2^u + 1 = 3^b$, cu $a < b$ şi $a + b = y$.

Scazând ultimele două relaţii obţinem

$$3^b - 3^a = 2 \Leftrightarrow 3^a(3^{b-a} - 1) = 2,$$

şi prin urmare $a = 0$, $b = y$.

Deci $3^y - 1 = 2$, de unde $y = 1$, $u = 1$ şi $x = 2$.

Aşadar $(x; y) \in \{(1; 0); (2; 1)\}$.

Problema 2. Fie $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că, dacă numerele $a = x^3 - x$ şi $b = x^2 + 1$ sunt raţionale, atunci x este raţional.

Soluţie: Dacă $x = 0$ nu avem ce demonstra. Pentru $x \neq 0$, atunci avem $\frac{a^2}{x^2} = \left(x^2 - 1\right)^2$ şi $b^2 = \left(x^2 + 1\right)^2$, adică

$$b^2 - \frac{a^2}{x^2} = 4x^2 = 4(b - 1),$$

de unde $(b - 2)^2 = \frac{a^2}{x^2}$.

Pentru $b = 2$ obţinem $a = 0$ şi deci $x \in \{-1; 0; 1\} \subset \mathbb{Q}$.

Dacă $b \neq 2$, atunci rezultă $x^2 = \frac{a^2}{(b-2)^2}$, de unde $|x| = \left|\frac{a}{b-2}\right| \in \mathbb{Q}$, adică $x \in \mathbb{Q}$.

Problema 3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $m(\angle ABC) = 30°$. Bisectoarea unghiului $\angle C$ intersectează pe AB în D. Notăm cu F şi E mijloacele laturilor $[BC]$ şi respectiv $[AB]$. Dacă $M \in (FD)$ şi $S \in (CD)$ sunt puncte alese astfel încât $AB = 4FM = 4SM$, atunci arătaţi că $AS \perp SE$.

Adrian Bud, Negreşti Oaş

Soluţie:

Triunghiul CDB este isoscel, căci $m(\angle ACB) = 60°$ şi deci $m(\angle DCB) = m(\angle DBC) = 30°$; prin urmare $CD = DB$. Rezultă de aici că triunghiul FDB este dreptunghic în F, cu $m(\angle DBF) = 30°$, deci $DB = 2FD$.

Analog, din triunghiul dreptunghic CAD, cu $m(\angle ACD) = 30^\circ$, rezultă $DC = 2AD$. Obţinem astfel că $FD = AD$.

Fie P mijlocul segmentului $[AE]$. Avem $AP = \frac{AE}{2} = \frac{AB}{4} = FM$. Rezultă că $PD = MD$, ca diferenţă de lungimi de segmente, respectiv congruente.

Prin urmare $\triangle SPD \equiv \triangle SMD$ (L.U.L.), de unde rezultă că

$$SP = SM = FM = \frac{AB}{4} = \frac{AE}{2}.$$

Astfel $SP = AP = PE$, adică triunghiul ASE este dreptunghic în S şi în concluzie $AS \perp SE$.

Problema 4. Demonstraţi că oricum am colora numerele naturale cu două culori, roşu şi albastru (fiecare număr fiind colorat cu una din cele două culori), există trei numere naturale a, b, c de aceeaşi culoare astfel încât $a = \dfrac{b+c}{2}$.

Soluţie: Presupunem că nu există a, b, c ca în enunţ. Arătăm mai întâi că există $n > 5$ astfel încât n şi $n+1$ să aibă aceeaşi culoare. În caz contrar, culorile ar alterna şi $5, 7, 9$ ar avea aceeaşi culoare, iar $7 = \dfrac{5+9}{2}$.

Fie $n > 5$ şi $n + 1$ două numere de aceeaşi culoare, să zicem roşie; atunci $n - 1$ şi $n + 2$ trebuie să fie albastre. Atunci $n - 4$ şi $n + 5$ sunt roşii, apoi $n - 3$ şi $n + 4$ sunt albastre. Dar $n + 3$ este media aritmetică a numerelor $n + 2$ şi $n + 4$ care sunt albastre dar şi media aritmetică a numerelor $n + 1$ şi $n + 5$ care sunt roşii, contradicţie.