Problema 1. Să se arate că dacă ultimele patru cifre ale unui pătrat perfect sunt egale, atunci acestea sunt egale cu 0.

Soluţie:

Fie a cifra din enunţ; evident $a \in \{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$.

Avem $x^2 \equiv a \cdot 1111 \pmod{10^4}$. De aici deducem că $x^2 \equiv 7a \pmod{16}$.

Dacă a este impar, atunci şi x este impar şi avem că $1 \equiv x^2 \equiv 7a \pmod 8$, deci $a \equiv 7 \pmod 8$, fals câtă vreme 1, 5, 9 nu au aceste proprietăţi.

Dacă a este par şi $a \neq 0$, atunci şi x este par şi avem că $0 \equiv x^2 \equiv 7a \pmod 4$. De aici deducem că $a = 4$. Avem $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $4k^2 \equiv 28 \pmod{16}$, $k^2 \equiv 7 \equiv 3 \pmod 4$, ceea ce este fals.

Aşadar $a = 0$.

Problema 2. Arătaţi că dacă $x, y, z > 0$, atunci

$$2\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) + 3 \leq \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}\,.$$

Gheorghe Szöllősy

Soluţie:

Inegalitatea din enunţ se scrie echivalent

$$2\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + 3\right) \leq \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + 3\,,$$

adică

$$2\left(\frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} + \frac{x+y+z}{x+y}\right) \leq \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z}\,,$$

deci

$$\frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} + \frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\,.$$

Din inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică (sau direct), avem că $\dfrac{2}{x+y} \leq \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}$ şi analoagele, relaţii care, adunate, dau inegalitatea din enunţ.

Egalitate avem dacă avem egalitate în inegalitatea mediilor, adică dacă $x = y$, $y = z$ şi $z = x$, pe scurt, dacă $x = y = z$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $\mathscr{C}$ cercul său circumscris. Înălţimile AA_1 şi CC_1, $A_1 \in BC$, $C_1 \in AB$, se intersectează în H şi intersectează cercul circumscris în A_2, respectiv C_2. Fie M un punct oarecare de pe arcul AC al lui $\mathscr{C}$ care nu conţine punctul B şi punctele $\{I\} = MC_2 \cap AB$, $\{J\} = MA_2 \cap BC$.
a) Demonstraţi că punctele H, I şi J sunt coliniare.
b) Arătaţi că dreapta IJ este paralelă cu dreapta lui Simson a punctului M.

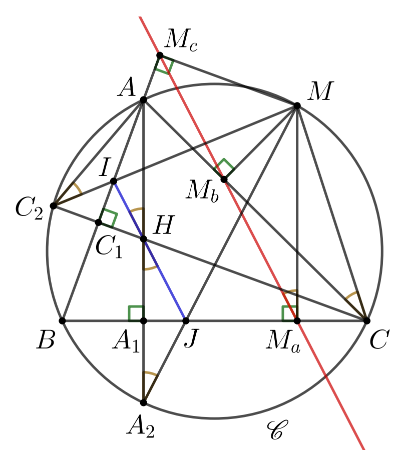
Alexandru-Gabriel Mîrşanu

Soluţie:
a) Vom folosi următorul rezultat cunoscut (şi util de ţinut minte):

Simetricele ortocentrului faţă de laturile unui triunghi se află pe cercul circumscris acestuia.

De exemplu, dacă B_2 este simetricul lui H faţă de AC, atunci avem că triunghiurile AHC şi AB_2C sunt congruente, iar patrulaterul BA_1HC_1 este inscriptibil. Rezultă că $m(\sphericalangle AB_2C) = m(\sphericalangle AHC) = m(\sphericalangle C_2HA_2) = 180° - m(\sphericalangle ABC)$, deci $ABCB_2$ este inscriptibil.

Aşadar avem că A_2, $C_2 \in \mathscr{C}$ sunt simetricele lui H faţă de BC, respectiv AB, adică dreptele AB şi BC sunt mediatoarele segmentelor $[HC_2]$, respectiv $[HA_2]$. Atunci $\sphericalangle AHI \equiv \sphericalangle AC_2I \equiv \sphericalangle AC_2M$ şi $\sphericalangle A_1HJ \equiv \sphericalangle A_1A_2J \equiv \sphericalangle AA_2M$. Dar patrulaterul AC_2A_2M fiind inscriptibil, avem $\sphericalangle AC_2M \equiv \sphericalangle AA_2M$, deci $\sphericalangle AHI \equiv \sphericalangle A_1HJ$, de unde rezultă coliniaritatea punctelor H, I şi J.



b) Fie M_a, M_b şi M_c proiecţiile punctului M pe dreptele BC, CA, respectiv AB.

Ştim că aceste puncte sunt coliniare (dreapta determinată de ele fiind dreapta lui Simson a punctului M). Atunci, punctele M, M_b, M_a, C fiind conciclice, avem $m(\sphericalangle M_bM_aB) = 90^\circ - m(\sphericalangle M_bM_aM) = 90^\circ - m(\sphericalangle M_bCM) = 90^\circ - m(\sphericalangle AA_2M) = 90^\circ - m(\sphericalangle A_1HJ) = m(\sphericalangle HJB)$, de unde rezultă că $M_bM_a \parallel IJ$.

Remarcă: Fiind paralela prin H la dreapta lui Simson, IJ este de fapt dreapta lui Steiner a punctului M, adică dreapta determinată de simetricele punctului M faţă de laturile triunghiului.

Problema 4. Baza unei piramide este un poligon convex cu 9 laturi. Fiecare diagonală a poligonului şi fiecare muchie laterală a piramidei se colorează cu negru sau cu alb. (Laturile poligonului de la bază nu se colorează.) Demonstraţi că există trei segmente care au fost colorate cu aceeaşi culoare şi care formează un triunghi.

Olimpiadă Hong Kong, 1998

Soluţie: Din principiul cutiei rezultă că cel puţin 5 dintre cele 9 muchii laterale trebuie să aibă o aceeaşi culoare, să zicem neagră. Să presupunem că, dacă V este vârful piramidei, atunci muchiile $[VB_1]$, $[VB_2]$, $[VB_3]$, $[VB_4]$ şi $[VB_5]$ sunt negre, unde B_1, B_2, B_3, B_4 şi B_5 sunt vârfuri, nu neapărat consecutive, dar în ordinea asta, ale poligonului de la bază.
Segmentele $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$, $[B_3B_4]$, $[B_4B_5]$, $[B_5B_1]$ nu pot fi, toate, laturi ale bazei, deci cel puţin unul dintre aceste segmente a fost colorat. Să presupunem că $[B_1B_2]$ este colorat. Dacă el este negru, s-a format triunghiul negru VB_1B_2. Să presupunem că $[B_1B_2]$ este alb. Dar vârfurile B_1 şi B_4, respectiv B_2 şi B_4 nu sunt vârfuri consecutive ale poligonului de la bază, deci $[B_1B_4]$ şi $[B_2B_4]$, fiind diagonale, au fost colorate. Dacă vreunul din ele este negru, împreună cu V formează un triunghi negru. Dacă ambele sunt albe, împreună cu $[B_1B_2]$ ele formează un triunghi alb.
În concluzie, întotdeauna se formează fie un triunghi negru, fie unul alb.