Problema 1. Fie a, b, c numere raţionale cu proprietatea că

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} = \frac{1}{a+b}.$$

Să se arate că numărul $\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ este raţional.

Soluţie: Prin calcul direct se obţine succesiv:

$$(a+b)^2 c + (a+b)^2 = ab(c^2+1) + c(a^2+b^2) \Leftrightarrow$$

$$(a+b)^2 = ab(c-1)^2.$$

Dacă $c = 1$ atunci relaţia din ipoteză devine $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+a} = \frac{1}{a+b}$, fals. Deci $ab = \left(\frac{a+b}{c-1}\right)^2$ şi deci $(c-3)(c+1) = \left(\frac{(a-b)(c-1)}{a+b}\right)^2$.

Prin urmare

$$\sqrt{\frac{c-3}{c+1}} = \frac{\sqrt{(c-3)(c+1)}}{c+1} = \frac{|a-b| \cdot |c-1|}{(c+1) \cdot |a+b|} \in \mathbb{Q}.$$

Problema 2. Numerele întregi şi nenule a, b, c verifică relaţia

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Arătaţi că cel puţin unul din numerele a, b sau c are modulul egal cu 1.

Cristian Mangra, Bucureşti şi Lucian Petrescu, Tulcea

Soluţie: Presupunem că $|a| \geq 2$ şi $|b| \geq 2$ şi $|c| \geq 2$. Atunci

$$1 \leq |a+b+c| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \leq \left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{c}\right| \leq \frac{3}{2},$$

şi deci $|a+b+c| = 1$.

Dacă a, b şi c ar fi impare, atunci

$$1 = |a+b+c| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

adică ar rezulta că $|a| = |b| = |c| = 3$; de aici obţinem că $a+b+c$ este multiplu de 3, fals, căci $|a+b+c| = 1$.

Dacă două dintre ele ar fi pare şi al treilea impar, atunci am obţine

$$1 = |a+b+c| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1,$$

fals câtă vreme $2+3+6=11\neq 1$.

Prin urmare unul din cele trei numere trebuie să aibă modulul egal cu 1.

Problema 3. Fie AD înălţime în triunghiul ABC, cu $D\in[BC]$. Determinaţi măsura unghiului $\angle BAC$, ştiind că lungimile segmentelor $[AD]$, $[BD]$ şi $[CD]$ sunt direct proporţionale cu numerele 2, 3 şi respectiv 10.

Sorana Ionescu, Slobozia

Soluţie:

Din $\frac{AD}{2}=\frac{BD}{3}=\frac{CD}{10}$ obţinem $AD=2a$, $BD=3a$ şi $CD=10a$, cu $a>0$. Fie $H\in(BC)$ astfel încât $BH=5a$ şi fie $HF\perp BC$, cu BC nu separă punctele A şi F. Avem $HF\|AD$, ambele fiind perpendiculare pe BC. Cum $HF=AD=2a$, obţinem că $HFAD$ este paralelogram; deoarece $m(\angle DHF)=90°$ şi $AD=DH=2a$ rezultă că $HFAD$ este pătrat, deci $m(\angle AFH)=90°$ şi $AF=DH=2a$. Considerăm $E\in FH$, cu $H\in(FE)$ şi $HE=a$.

Avem $m(\angle BHE)=m(\angle CDA)=90°$ şi $\frac{BH}{CD}=\frac{HE}{DA}=\frac{1}{2}$; prin urmare $\triangle BHE\sim\triangle CDA$, de unde $\angle HBE\equiv\angle DCA$ şi $m(\angle ABC)+m(\angle ACB)=m(\angle ABC)+m(\angle HBE)=m(\angle ABE)$.

Avem de asemenea că $\triangle BHE\equiv\triangle CDA$ (cazul *C.C.*); rezultă de aici că $AB=AE$ şi $\angle ABD\equiv\angle AEF$. Dar $\angle DAE\equiv\angle AEF$, de unde $\angle DAE\equiv\angle ABD$. Aşadar

$$m(\angle BAE)=m(\angle BAD)+m(\angle DAE)=m(\angle BAD)+m(\angle ABD)=90°,$$

şi cum $AB=AE$, concluzionăm că triunghiul ABE este dreptunghic isoscel, de unde rezultă că $m(\angle ABE)=m(\angle ABC)+m(\angle ACB)=45°$, şi deci $m(\angle BAC)=135°$.

Problema 4. Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la 2018. O operaţie constă din a şterge două numere naturale $a\geq b$ de pe tablă şi de a scrie pe tablă câtul împărţirii cu rest a lui a la b. După 2017 asemenea operaţii pe tablă rămâne un singur număr. Arătaţi că pentru orice număr natural $n\in\{1,2,3,\ldots,2018\}$, există o succesiune de 2017 asemenea operaţii după efectuarea cărora pe tablă să rămână numărul n.

prelucrare *Andrei Eckstein*

Soluţie:

Există diverse căi de a alege succesiunea de operaţii. Iată un exemplu de alegere.

• Dacă $n\geq 4$ este impar, atunci $n=2k+1$ şi putem începe prin a face

operaţiile: $(2,3) \mapsto 1$, $(4,5) \mapsto 1$, $\dots$, $(2k-2, 2k-1) \mapsto 1$, $(2k, 2k+2) \mapsto 1$, $(2k+3, 2k+4) \mapsto 1$, $\dots$, $(2017, 2018) \mapsto 1$. Rămânem pe tablă cu numărul n şi în rest numai cu numere de 1. Oricum am face celelalte operaţii, la sfârşit pe tablă rămâne numărul n.
• Dacă $n \geq 4$ este par, atunci $n = 2k$ şi putem începe prin a face operaţiile: $(2,3) \mapsto 1$, $(4,5) \mapsto 1$, $\dots$, $(2k-2, 2k-1) \mapsto 1$, $(2k+1, 2k+2) \mapsto 1$, $\dots$, $(2017, 2018) \mapsto 1$. Rămânem pe tablă cu numărul n şi în rest numai cu numere de 1. Oricum am face celelalte operaţii, la sfârşit pe tablă rămâne numărul n.
• Dacă $n = 3$, putem face operaţiile: $(2,4) \mapsto 2$, $(5,10) \mapsto 2$, $(6,7) \mapsto 1$, $(8,9) \mapsto 1$, $(11,12) \mapsto 1$, $\dots$, $(2017, 2018) \mapsto 1$, apoi $(2,2) \mapsto 1$. Rămânem pe tablă cu numărul 3 şi în rest numai cu numere de 1. Oricum am face celelalte operaţii, la sfârşit pe tablă rămâne numărul 3.
• Dacă $n = 2$, putem face operaţiile $(3,4) \mapsto 1$, $(5,6) \mapsto 1$, $\dots$, $(2017, 2018) \mapsto 1$. Rămânem pe tablă cu numărul 2 şi în rest numai cu numere de 1. Oricum am face celelalte operaţii, la sfârşit pe tablă rămâne numărul 2.
• Dacă $n = 1$, putem face operaţiile $(3,6) \mapsto 2$, $(4,5) \mapsto 1$, $(7,8) \mapsto 1$, $\dots$, $(2017, 2018) \mapsto 1$, apoi $(2,2) \mapsto 1$. Rămânem numai cu cifre 1 pe tablă. La final, pe tablă rămâne numărul 1.