Problema 1. Să se determine toate numerele naturale n cu proprietatea că $\sqrt{2n+1}$ este număr raţional, iar numerele

$$\sqrt{2n+2},\ \sqrt{2n+3},\ \ldots,\ \sqrt{3n+3}$$

sunt iraţionale.

Soluţie: Avem $2n+1 = m^2$, $m \in \mathbb{N}$.

Pentru ca $\sqrt{2n+2}$, $\sqrt{2n+3}$, $\ldots$, $\sqrt{3n+3}$ să fie toate iraţionale, este necesar şi suficient ca $3n+3 < (m+1)^2$. Ultima condiţie este echivalentă cu $3 \cdot \frac{m^2-1}{2} + 3 < (m+1)^2$. De aici deducem că $m^2 - 4m + 1 < 0$. Cum m este număr natural impar, din ultima inegalitate rezultă $m \in \{1; 3\}$.

Rezultă că $n \in \{0; 4\}$. Ambele valori verifică proprietatea din enunţ.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale a, b şi c care verifică relaţiile:

$$a^2 + 3 = bc, \quad b^2 + 14 = ca, \quad c^2 = ab + 30.$$

Soluţie: Să observăm că avem $a^3 + 3a = b^3 + 14b = c^3 - 30c$, deci $c > a > b$. Adunând relaţiile din enunţ obţinem:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 13 \Leftrightarrow (c-a)^2 + (a-b)^2 + (c-b)^2 = 26.$$

Singura combinaţie posibilă este ca $\{c-a; a-b; c-b\} = \{1; 3; 4\}$. Cum $c-b$ este cel mai mare rezultă $c-b = 4$. Avem două cazuri: $a-b = 3$ şi $c-a = 1$ sau $a-b = 1$ şi $c-a = 3$. Prima situaţie nu conduce însă la soluţii. În cea de-a doua situaţie, substituind $a = c-3$, $b = c-4$, $c \in \mathbb{N}$ în prima egalitate se obţine $c = 6$, deci $(a, b, c) = (3, 2, 6)$, triplet care verifică şi celelalte două ecuaţii din enunţ.

Problema 3. Trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele perpendiculare. Paralela la baze dusă prin punctul de intersecţie a diagonalelor intersectează laturile neparalele $[BC]$ şi $[AD]$ în punctele P respectiv R. Punctul Q este simetricul punctului P faţă de mijlocul segmentului $[BC]$. Demonstraţi că:

a) $QR = AD$;

b) $QR \perp AD$.

Soluţie: Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor AC şi BD şi fie M mijlocul segmentului $[BC]$.

a) $[OM]$ este linie mijlocie în triunghiul PQR, deci $MO \| RQ$ şi $OM = \frac{RQ}{2}$. Pe de altă parte, $[OM]$ este mediană în triunghiul dreptunghic BOC, deci $OM = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$. De aici rezultă $RQ = AD$.

b) Fie T punctul de intersecţie a dreptelor MO şi AD. Atunci

$$\angle MBO \equiv \angle MOB \equiv \angle DOT,$$

şi cum $\angle OCB \equiv \angle TDO$, rezultă că

$$m(\angle OTD) = m(\angle BOC) = 90^\circ.$$

Deci $MT \perp AD$ şi deoarece $MT \| RQ$, rezultă cerinţa.

Problema 4. Doi jucători, Ana şi Bogdan, joacă următorul joc: ei plasează 2017 pietricele pe o masă. Mai întâi Ana ia o pietricică de pe masă. Apoi Bogdan poate lua una sau două pietricele de pe masă. Urmează Ana care poate lua 1, 2, 3 sau 4 pietricele. Apoi Bogdan poate lua cel puţin una şi cel mult 8 pietricele de pe masă şi aşa mai departe, la mutarea j, jucătorul aflat la mutare trebuie să ia cel puţin una şi cel mult 2^{j-1} pietricele de pe masă. Jucătorul care ia ultima pietricică de pe masă câştigă jocul. Care din cei doi jucători are strategie câştigătoare?

Concursul KöMaL, Ungaria, 2017 (problema B.4892.)

Soluţie:
În primele 10 mutări se pot lua de pe masă, în total, cel mult $1+2+4+\ldots+512 = 1023$ pietricele, aşa încât jocul nu se poate termina din mai puţin de 11 mutări. Ana ar putea câştiga din mutarea a 11-a (a 6-a ei mutare) dacă pe masă, după efectuarea primelor 10 mutări, au rămas cel mult 1024 pietricele. Însă Bogdan poate împiedica acest lucru, de exemplu luând la fiecare din primele sale 5 mutări câte o singură pietricică de pe masă. Astfel, numărul pietricelelor luate de pe masă după primele 11 mutări este cel mult $1+1+4+1+16+1+64+1+256+1+1024 = 1370$. Aşadar Bogdan poate face în aşa fel încât după 11 mutări să mai rămână pietricele pe masă. Deoarece la cea de-a 6 mutare a sa (a 12-a în total) Bogdan poate lua până la 2048 de pietricele, el poate lua toate pietricelele de pe masă, câştigând în acest fel jocul. În concluzie, Bogdan are strategie câştigătoare.