Problema 1. Demonstraţi că dacă pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $1+2^n+4^n$ este prim, atunci $n = 3^k$, unde $k \in \mathbb{N}$.

Soluţie: Fie $n = 3^k \cdot r$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $(r;3) = 1$. Demonstrăm că numărul $p = 1 + 2^n + 4^n$ se divide la numărul $q = 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k}$. Evident că

$$q | \left(1 + 2^{3^k} + 4^{3^k}\right)\left(1 - 2^{3^k}\right) = 1 - 2^{3^{k+1}},$$

deci $2^{3^{k+1}} \equiv 1 \pmod{q}$.

Dacă $r = 3s+1$, atunci $n \equiv 3^k \pmod{3^{k+1}}$, de unde $2^n \equiv 2^{3^k} \pmod{q}$ şi $4^n \equiv 4^{3^k} \pmod{q}$; deci $p \equiv 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k} = q \equiv 0 \pmod{q}$, adică $q|p$.

Dacă $r = 3s + 2$, atunci $n \equiv 2 \cdot 3^k \pmod{3^{k+1}}$, de unde $2n \equiv 3^k \pmod{3^{k+1}}$; deci $p \equiv 1 + 4^{3^k} + 2^{3^k} = q \equiv 0 \pmod{q}$, adică $q|p$.

Aşadar, în ambele situaţii am obţinut că $q|p$ şi cum p este prim, iar $q > 1$, deducem că $p = q$ şi în concluzie $n = 3^k$.

Comentariu:

Ideea este că $x^2 + x + 1$ divide $x^{2k} + x^k + 1$ dacă k nu e multiplu de 3.
După ce demonstrăm asta, e cam gata:
dacă n nu este putere a lui 3, atunci are un factor m diferit de 3^j, deci $4^n + 2^n + 1$ e divizibil cu $4^m + 2^m + 1$, deci nu este prim. Revenind la afirmatia:
,,dacă 3 nu divide k atunci $x^2 + x + 1$ divide $x^{2k} + x^k + 1$",
o luăm pe cazuri:
dacă $k = 3j + 1$, aratăm că $x^{2k} - x^2$ e divizibil cu $x^3 - 1$, deci cu $x^2 + x + 1$, iar $x^k - x$ este divizibil cu $x^3 - 1$, deci cu $x^2 + x + 1$.
Dacă $k = 3j + 2$, atunci $x^{2k} - x$ şi $x^k - x^2$ sunt divizibile cu $x^3 - 1$, deci cu $x^2 + x + 1$.

Problema 2. Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că există numere naturale nenule a şi b astfel încât $\dfrac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = n^2 + n + 1$.

Nordic Mathematical Contest, 2017

Soluţie: Putem alege $b = n - 1$ şi $a = n^2$ dacă $n \neq 1$ şi $b = 2$ şi $a = 4$ dacă $n = 1$.
Într-adevăr, folosind cunoscuta relaţie $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^2+x+1)\cdot[(x-1)^2+(x-1)+1]$ (care se verifică prin calcul direct), putem scrie pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ că

$$n^2 + n + 1 = \frac{n^4 + n^2 + 1}{(n-1)^2 + (n-1) + 1}.$$

Putem aşadar alege $a = n^2$ şi $b = n - 1$, numai că în cazul $n = 1$ rezultă $b = 0$ ceea ce nu convine. Prin încercări găsim pentru $n = 1$ că $1^2 + 1 + 1 =$

$$3 = \frac{21}{7} = \frac{4^2+4+1}{2^2+2+1}\,.$$

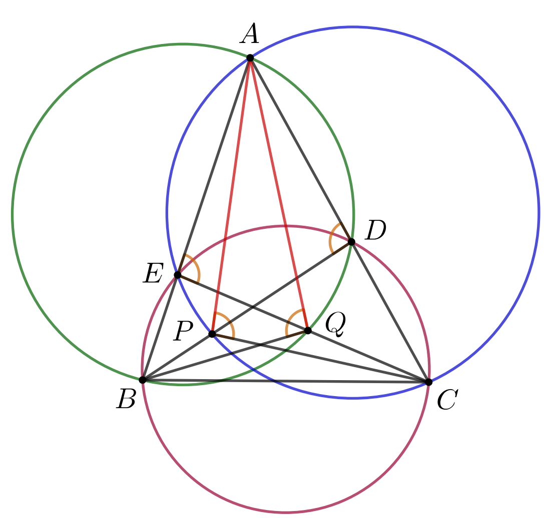
Problema 3. Un cerc arbitrar care trece prin vârfurile B şi C intersectează a doua oară laturile $[AC]$ şi $[AB]$ ale unui triunghi oarecare ABC în punctele D şi E. Cercul circumscris triunghiului AEC intersectează segmentul $[BD]$ în punctul P, iar cercul circumscris triunghiului ABD intersectează $[CE]$ în punctul Q.
Arătaţi că $AP = AQ$.

Mihai Miculiţa şi Petru Braica

Soluţie: (*Mihai Miculiţa*)
Patrulaterul $BCDE$ fiind inscriptibil, avem $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle BEC$, deci $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC$.
Dar şi patrulaterele $ADQB$ şi $AEPC$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AQB$ şi $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle APC$.
Prin urmare, $\sphericalangle AQB \equiv \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle APC$.
Rezultă atunci că $\Delta\, ADP \sim \Delta\, APC$ (UU), deci $\dfrac{AD}{AP} = \dfrac{AP}{AC}$, adică $AP^2 = AC \cdot AD$.
Analog se arată că $AQ^2 = AB \cdot AE$.
Pe de altă parte, patrulaterul $BCDE$ fiind inscriptibil, scriind puterea punctului A faţă de cercul circumscris acestui patrulater, avem

$$AB \cdot AE = \rho(A) = AC \cdot AD,$$

adică $AP^2 = AQ^2$ şi concluzia.



Problema 4. Este posibil să aranjăm numerele de la 1 la 121 într-un tabel 11×11 astfel încât oricare două numere consecutive să fie în pătrăţele care au o latură comună şi toate pătratele perfecte să fie pe o aceeaşi coloană?

Olimpiadă Rusia, 1995

Soluţie:
Vom demonstra că o asemenea aranjare a numerelor nu este posibilă.
Să presupunem contrariul. De la 1 la 121 avem 11 pătrate perfecte, deci acestea ar trebui să ocupe în totalitate coloana pe care se află. În plus, pentru orice pătrat perfect n^2 ($n \in \{2, 3, \ldots, 10\}$), numerele $n^2 - 1$ şi $n^2 + 1$ trebuie să se afle unul în stânga şi celălalt în dreapta lui n^2. Deducem că toate numerele situate între două pătrate perfecte consecutive trebuie să se afle de aceeaşi parte a coloanei care conţine pătratele perfecte şi că, mai mult, dacă numerele situate între $(n-1)^2$ şi n^2 sunt de o parte a coloanei care conţine pătratele perfecte, atunci numerele cuprinse între n^2 şi $(n+1)^2$ sunt situate de cealaltă parte. Deducem că de o parte a coloanei pătratelor perfecte trebuie să avem $2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50$ de numere, iar de cealaltă parte $4 + 8 + 12 + 16 + 20 = 60$ de numere. Însă aceste numere ar trebui să completeze un număr întreg de coloane, ori 50 şi 60 nu sunt divizibile cu 11. Prin urmare presupunerea făcută este falsă; o astfel de completare nu este posibilă.