Problema 1. Numerele naturale m şi n sunt prime între ele. Demonstraţi că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \mid m^k - 1$.

Soluţie: Considerăm numerele $m^1, m^2, \ldots m^n$. Dacă unul dintre ele dă restul 1 la împărţirea la n, atunci problema este rezolvată. Dacă nu, conform principiului lui Dirichlet, două din aceste numere au acelaşi rest modulo n; fie acestea m^i şi m^j, cu $i > j$. Deci

$$m^i \equiv m^j \pmod{n} \Rightarrow n | m^i - m^j = m^j \left(m^{i-j} - 1\right).$$

Cum m şi n sunt prime între ele, din ultima relaţie rezultă că $n | m^{i-j} - 1$.

Problema 2. Fie p şi q numere naturale astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{1319}.$$

Demonstaţi că numărul p se divide la 1979.

Soluţie: Avem

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{1319} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1319} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1318}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1319} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{659}\right) =$$

$$= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \ldots + \frac{1}{1319} = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right) =$$

$$= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \ldots + \frac{1979}{989 \cdot 990}.$$

Evident că, aducând fracţiile la numitor comun, numărătorul se va divide la 1979. Numitorul, fiind produs de numere mai mici ca 1979, nu se poate divide la 1979, care este prim. Prin urmare $1979 \mid p$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez şi M, N mijloacele laturilor neparalele AB, respectiv CD. Perpendicularele duse din punctele M şi N pe diagonalele AC şi respectiv BD se intersectează în punctul P. Arătaţi că $PA = PD$.

Olimpiadă Moscova, 2011

Soluţie: Fie Q mijlocul bazei AD. Atunci MQ şi NQ sunt linii mijlocii în triunghiurile ABD şi respectiv ADC, deci $MQ \| BD$ şi $NQ \| AC$. Rezultă de aici că $MP \perp NQ$ şi $NP \perp MQ$, adică P este ortocentrul triunghiului MNQ. Prin urmare obţinem că $PQ \perp MN$ şi cum $MN \| AD$ va rezulta $PQ \perp AD$. Cum Q este mijlocul lui AD concluzionăm că PQ este mediatoarea bazei AD. Aşadar $PA = PD$.

Problema 4. Fie A şi B două submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 64\}$ astfel încât:

- A şi B au câte 16 elemente,
- toate elementele lui A sunt numere pare,
- toate elementele lui B sunt numere impare,
- suma elementelor lui A este egală cu suma elementelor lui B.

Demonstraţi că în mulţimea $A \cup B$ există două elemente cu suma 65.

Turneul Oraşelor, 2007

Soluţie:
Să presupunem că ar exista două mulţimi A şi B care îndeplinesc condiţiile din enunţ, dar a căror reuniune nu conţine două elemente cu suma 65.
Să grupăm elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, 64\}$ în perechi de forma $(i, 65 - i)$. Atunci $A \cup B$ nu are voie să conţină două numere care fac parte din aceeaşi pereche. Astfel, dacă $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{16}\}$, (unde $1 \leq a_k \leq 64$ sunt numere pare) atunci B nu are voie să conţină niciunul din numerele $65 - a_1$, $65 - a_2$, $\ldots$, $65 - a_{16}$. Acestea sunt 16 numere impare din mulţimea $I = \{1, 3, 5, \ldots, 63\}$, prin urmare mulţimea B trebuie să conţină exact celelalte 16 elemente ale mulţimii I. Atunci suma elementelor mulţimii A este $a_1 + a_2 + \ldots + a_{16}$, iar suma elementelor mulţimii B este $(1 + 3 + 5 + \ldots + 63) - [(65 - a_1) + (65 - a_2) + \ldots + (65 - a_{16})] = 32^2 - 65 \cdot 16 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{16}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} - 16$, aşadar diferită de suma elementelor mulţimii A, contradicţie.