Problema 1. Fie a, b, c, d numere întregi astfel încât $\mid ac - bd \mid = 1$. Să se arate că $(a + b; c + d) = 1$.
Soluţie: Avem $(a+b)c-(c+d)b = ad-bc = \pm 1$ şi dacă $n \mid a+b$ şi $n \mid c+d$, atunci rezultă că $n \mid \pm 1$, deci $n = 1$.

Problema 2. Să se arate că numărul $a = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2016}{2017}$ verifică inegalităţile:

$$\frac{1}{2017} < a^2 < \frac{1}{1009}\ .$$

Shortlist ONM, 2003

Soluţie: Considerăm numerele $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2015}{2016}$ şi $c = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018}$. Deoarece avem $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă de aici că $b < a < c$ şi deci $ab < a^2 < ac$. Cum $ab = \frac{1}{2017}$ şi $ac = \frac{2}{2018} = \frac{1}{1009}$, concluzia rezultă imediat.

Problema 3. Fie patrulaterul convex $ABCD$, în care $m(\angle ABD) = 10°$, $m(\angle DBC) = 20°$, $m(\angle BAC) = 100°$ şi $m(\angle CAD) = 40°$.
Determinaţi măsura unghiului $\angle CDB$.

Sorana Ionescu, Slobozia

Soluţie:

Obţinem, în triunghiul ABC, că $m(\angle ABC) = 30°$ şi $m(\angle ACB) = 50°$.

Fie punctul $E \in (AB)$ astfel încât $m(\angle ECB) = 10°$. Rezultă de aici că $m(\angle ACE) = m(\angle AEC) = 40°$, de unde $AC = AE$. Vom arăta că $CE = AB$.

Construim triunghiul echilateral AEF astfel încât dreapta AB să separe punctele C şi F, deci $AF = AE = FE$ şi $m(\angle FAE) = m(\angle FEA) = 60°$. Deducem că $AF = AC$, $m(\angle CAF) = 160°$, $m(\angle ACF) = 10°$, $m(\angle FCE) = 30°$, $m(\angle CEF) = 100°$, $EF = AC$ şi $m(\angle CEB) = 140°$.

Din congruenţa triunghiurilor FEC şi BAD (cazul U.L.U.) rezultă $EC = AB$, iar din congruenţa triunghiurilor CEB şi BAD obţinem $CB = BD$.

Concluzionăm, în triunghiul CBD, că $m(\angle CDB) = m(\angle DCB) = 80°$.

Problema 4. Dispunem de 32 de lămpi, iniţial toate stinse, fiecare din ele având câte un comutator. Când i se apasă comutatorul, o lampă care era stinsă se aprinde, iar o lampă care era aprinsă se stinge. La o tură avem voie să apăsăm exact 5 comutatoare. Care este numărul minim de ture necesar pentru a face ca toate lămpile să fie aprinse?

Concurs Lituania, 2017

Soluţie:
Este evident că sunt necesare cel puţin 7 ture (din $k \le 6$ ture se pot aprinde cel mult $6k < 32$ lămpi).
Dar după un număr impar de ture, numărul lămpilor aprinse este impar.
Într-adevăr, în k ture acţionăm asupra a $5k$ comutatoare, nu neapărat diferite.
Aprinse, vor fi acele lămpi, ale căror comutatoare au fost apăsate de un număr impar de ori. Dacă k este impar, $5k$ este impar, deci numărul lămpilor pe ale căror comutatoare s-a apăsat de un număr impar de ori este impar, aşadar numărul lămpilor aprinse este impar.
Prin urmare, după 7 ture numărul lămpilor aprinse este impar, deci nu poate fi 32.
Rezultă că este nevoie de cel puţin 8 ture pentru a face ca toate lămpile să fie aprinse.

Vom arăta că 8 ture sunt suficiente: putem alege apăsările astfel încât după 8 ture toate lămpile să fie aprinse.
Vom proceda, de exemplu, astfel:
- numerotăm comutatoarele de la 1 la 32
- la tura 1 acţionăm asupra comutatoarelor 1, 2, 3, 4 şi 5
- la tura 2 acţionăm asupra comutatoarelor 2, 3, 4, 5 şi 6
(efectul este că lămpile 1 şi 6 sunt aprinse, iar restul sunt stinse)
- la tura 3 acţionăm asupra comutatoarelor 2, 3, 4, 5 şi 7 (le aprindem)
- la tura 4 aprindem lămpile 8, 9, 10, 11 şi 12
- la tura 5 aprindem lămpile 13, 14, 15, 16 şi 17
- la tura 6 aprindem lămpile 18, 19, 20, 21 şi 22
- la tura 7 aprindem lămpile 23, 24, 25, 26 şi 27
- la tura 8 aprindem lămpile 28, 29, 30, 31 şi 32.
După 8 ture toate lămpile sunt aprinse.

În concluzie, numărul minim de ture este 8.