# Barajul nr. 2 pentru JBMO

6 mai 2018

Soluţii oficiale

**Problema 1.** Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ un şir de numere întregi astfel încât $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ şi, pentru orice $n = 2, 3, \ldots, 999$,

$$a_{n+1} - a_n = 4(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n).$$

Determinaţi numărul indicilor $1 \leq n \leq 1000$ pentru care $a_n + 2018$ este pătrat perfect.

*Fehmi Emre Kadan*

**Soluţie:** Pentru $n \geq 2$ avem

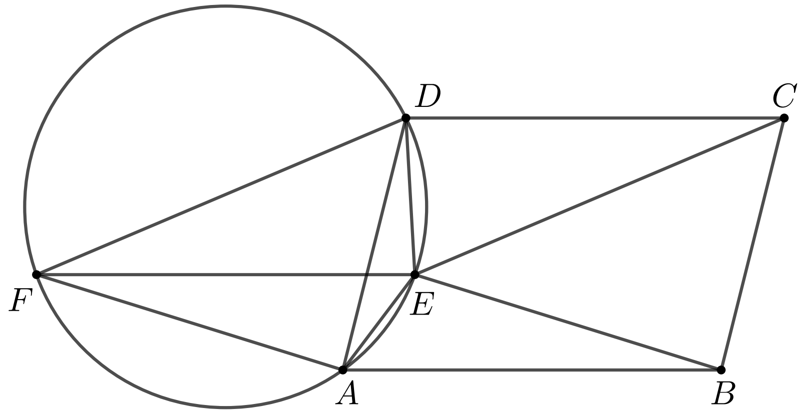
$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)}{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-2} + a_{n-1})} = a_{n-1} + a_n,$$

deci $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - a_{n-1}^2$. Avem $a_2 = a_1^2 - 2$ şi prin inducţie rezultă că $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $\forall\, n \geq 1$.
Atunci $a_2 = 7 = 45^2 - 2018$, $a_3 = a^2 - 2 = 47$, $a_4 = 47^2 - 2 = 2207 = 65^2 - 2018$, deci $a_n + 2018$ este pătrat perfect pentu $n = 2$ şi $n = 4$, dar nu şi pentru $n = 1$ sau $n = 3$. Să arătăm că $a_n + 2018$ nu este pătrat perfect pentru $n > 4$. Să presupunem că $a_k + 2018 = c^2$, unde $k > 4$, iar $c \in \mathbb{N}$. Atunci $c^2 - a_{k-1}^2 = 2016$. Cum $c > a_{k-1}$, obţinem că $2016 = c^2 - a_{k-1}^2 \geq (a_{k-1} + 1)^2 - a_{k-1}^2 = 2a_{k-1} + 1$, deci $a_{k-1} < 1008$. Însă şirul este crescător şi, pentru $k > 4$, avem $a_{k-1} \geq a_4 = 2207 > 1008$, ceea ce este o contradicţie. Răspunsul este 2.

**Problema 2.** Un punct $E$ situat în interiorul unui paralelogram $ABCD$ satisface $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BCE$. Arătaţi că centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $ABE$, $BCE$, $CDE$ şi $DAE$ sunt conciclice.

*Selim Bahadir*

**Soluţie:** Fie $F$ un punct în exteriorul paralelogramului astfel încât $\Delta\, ABF \equiv \Delta\, DCE$. Cum $\sphericalangle FBA \equiv \sphericalangle ECD$ şi $AB \parallel CD$, avem $BF \parallel CE$. Pe de altă parte, $BF = CE$, deci $BFEC$ este paralelogram. Analog rezultă că $FADE$ este paralelogram. Obţinem că $\sphericalangle EFB \equiv \sphericalangle ECB \equiv \sphericalangle BAE$, ceea ce arată că patrulaterul $BFAE$ este inscriptibil. Atunci $\sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle EFA \equiv \sphericalangle EDA$. Cum $ABCD$ este paralelogram, avem şi $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle ECD$ şi $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle EDC$. Fie $G$, $H$ şi $I$ puncte în exteriorul paralelogramului $ABCD$ astfel încât $\Delta\, BCG \equiv \Delta\, ADE$, $\Delta\, CDH \equiv \Delta\, BAE$ şi $\Delta\, ADI \equiv \Delta\, BCE$. În mod analog sea arată că patrulaterele $EBGC$, $ECHD$ şi $EDIA$ sunt, toate, inscriptibile şi congruente cu $EAFB$. Astfel, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $ABE$, $BCE$, $CDE$ şi $DAE$ se află la aceeaşi distanţă de punctul $E$, prin urmare ele se află pe un cerc cu centrul în $E$.




**Problema 3.** Într-un turneu de şah organizat la o şcoală, oricare doi elevi ai şcolii au jucat o partidă unul contra celălalt. Aflaţi numărul minim de elevi pe care îl poate avea şcoala dacă fiecare fată are cel puţin 21 de victorii împotriva băieţilor şi fiecare băiat are cel puţin 12 victorii împotriva fetelor.

*Azer Kerimov*

**Soluţie:** Răspunsul este 65. Să presupunem că la turneu participă $x$ fete şi $y$ băieţi. Evident, $xy \geq 21x + 12y$ este o condiţie necesară pentru existenţa unui turneu în condiţiile date. Să arătăm că această inegalitate este şi o condiţie suficientă pentru existenţa turneului.[1] Să înregistrăm rezultatele partidelor disputate între fete şi băieţi într-un tabel $x \times y$. Numerotăm fetele de la 1 la $x$ şi băieţii de la 1 la $y$. Scriem **1** la intersecţia liniei $m$ cu coloana $n$ din tabel dacă fata cu numărul $m$ îl învinge pe băiatul cu numărul $n$ şi scriem **0** dacă fata $m$ pierde partida cu băiatul $n$. Să demonstrăm că există un tabel în care fiecare linie conţine cel puţin 21 de **1** şi fiecare coloană conţine cel puţin 12 de **0**. Pornim de la un tabel în care toate căsuţele situate pe primele 21 de coloane conţin un **1**, iar toate celelalte căsuţe sunt completate cu **0**-uri şi îl vom transforma pas cu pas într-un tabel care îndeplineşte condiţiile. Să presupunem că pe coloana $k$ sunt mai puţin de 12 **0**-uri. Deoarece numărul total de **0**-uri este cel puţin $12y$, va exista o coloană, să zicem $\ell$, care conţine mai mult de 12 **0**-uri. În acest caz vom alege o linie care la intersecţiile cu coloanele $k$ şi $\ell$ conţine **1**, respectiv **0** şi schimbăm între ele aceste două valori. După fiecare asemenea mutare o coloană care are **0**-uri lipsă câştigă câte un **0**, în vreme ce numărul de **1**-uri de pe fiecare linie rămâne nemodificat. Astfel, după un număr finit de mutări obţinem tabelul dorit.
Să determinăm acum valoarea minimă a sumei $x+y$. Inegalitatea $(x-12)(y-21) \geq 12 \cdot 21$ este echivalentă cu $xy \geq 21x + 12y$. Din inegalitatea mediilor, avem

$$(x-12)+(y-21) \geq 2\sqrt{(x-12)(y-21)} \geq 2\sqrt{12 \cdot 21} > 31.$$

[1] În loc de asta se poate da un exemplu de turneu cu 65 de participanţi, precizând rezultatele înregistrate, turneu care să îndeplinească condiţiile.

Astfel, $x + y \geq 12 + 21 + 32 = 65$. Oricare din perechile $(26, 39)$, $(27, 38)$, $(28, 37)$, $(29, 36)$ şi $(30, 35)$ are suma 65 şi satisface condiţia $xy \geq 21x + 12y$.

**Problema 4.** Fie $x, y, z$ numere reale cu proprietatea că $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ sunt lungimi de laturi de triunghi şi că $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 5$. Demonstraţi că

$$\frac{x(y^2 - 2z^2)}{z} + \frac{y(z^2 - 2x^2)}{x} + \frac{z(x^2 - 2y^2)}{y} \geq 0.$$

*Fehmi Emre Kadan*

**Soluţie:** Deoarece $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, avem

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z})(-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) =$$

$$2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2 - z^2 > 0.$$

De asemenea,

$$5xy = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) xy = x^2 + \frac{xy^2}{z} + yz,$$

$$5yz = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) yz = y^2 + \frac{yz^2}{x} + zx,$$

$$5zx = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) zx = z^2 + \frac{zx^2}{z} + xy,$$

care, adunate, dau $2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{xy^2}{z} + \frac{yz^2}{x} + \frac{zx^2}{y} - 2(xy + yz + zx) = \frac{x(y^2 - 2z^2)}{z} + \frac{y(z^2 - 2x^2)}{x} + \frac{z(x^2 - 2y^2)}{y} > 0$.

**Remarcă:** Presupunând $x = \max\{x, y, z\}$, egalitatea are loc dacă triunghiul este degenerat, $\sqrt{\frac{y}{x}} = u$, $\sqrt{zx} = 1 - u$, unde $u \approx 0,555$ este unica rădăcină din intervalul $(0, 1)$ a ecuaţiei $u^3 - 2u^2 - u + 1 = 0$.