Barajul nr. 2 pentru JBMO

6 mai 2018

Problema 1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ un şir de numere întregi astfel încât $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ şi, pentru orice $n = 2, 3, \ldots, 999$,

$$a_{n+1} - a_n = 4(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n).$$

Determinaţi numărul indicilor $1 \leq n \leq 1000$ pentru care $a_n + 2018$ este pătrat perfect.

Problema 2. Un punct E situat în interiorul unui paralelogram $ABCD$ satisface $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BCE$. Arătaţi că centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABE, BCE, CDE şi DAE sunt conciclice.

Problema 3. Într-un turneu de şah organizat la o şcoală, fiecare doi elevi ai şcolii au jucat o partidă unul contra celălalt. Aflaţi numărul minim de elevi pe care îl poate avea şcoala dacă fiecare fată are cel puţin 21 de victorii împotriva băieţilor şi fiecare băiat are cel puţin 12 victorii împotriva fetelor.

Problema 4. Fie x, y, z numere reale cu proprietatea că $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ sunt lungimi de laturi de triunghi şi că $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 5$. Demonstraţi că

$$\frac{x(y^2 - 2z^2)}{z} + \frac{y(z^2 - 2x^2)}{x} + \frac{z(x^2 - 2y^2)}{y} \geq 0.$$