Barajul nr. 1 pentru JBMO

5 mai 2018

Soluţii oficiale

Problema 1. Fie a, b, c numere reale distincte şi x un număr real. Ştiind că trei dintre numerele

$$ax^2 + bx + c,\ ax^2 + cx + b,\ bx^2 + cx + a,\ bx^2 + ax + c,\ cx^2 + ax + b,\ cx^2 + bx + a$$

sunt egale, demonstraţi că $x = 1$.

Fehmi Emre Kadan

Soluţie:
Fie $ax^2 + bx + c = x_1$, $ax^2 + cx + b = x_2$, $bx_2 + cx + a = x_3$, $bx^2 + ax + c = x_4$, $cx^2 + ax + b = x_5$, $cx^2 + bx + a = x_6$.
Atunci $(b-c)(x-1) = x_1 - x_2$, $(c-a)(x-1) = x_3 - x_4$, $(a-b)(x-1) = x_5 - x_6$, $(b-c)(x^2-1) = x_4 - x_5$, $(c-a)(x^2-1) = x_6 - x_1$, $(a-b)(x^2-1) = x_2 - x_3$, $(b-c)(x^2-x) = x_3 - x_6$, $(c-a)(x^2-x) = x_5 - x_2$, $(a-b)(x^2-x) = x_1 - x_4$.
Pentru $x = 0$ obţinem numerele a, a, b, b, c, c şi, cum a, b, c sunt distincte, nicio valoare nu poate figura de trei ori.
Similar, pentru $x = -1$ obţinem numerele $a + b - c$, $a + b - c$, $b + c - a$, $b + c - a$, $c + a - b$, $c + a - b$. Nici aici o valoare nu poate apărea de trei ori deoarece dacă două dintre numerele $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ ar fi egale, atunci şi două dintre numerele a, b, c ar fi egale ceea ce nu este posibil.
Considerăm cazul în care $x \notin \{-1, 0, 1\}$.
Cum a, b, c sunt distincte, din ecuaţiile de mai sus rezultă că $x_u \neq x_v$ pentru orice u par şi v impar. Aşadar putem avea numai $x_1 = x_3 = x_5$ sau $x_2 = x_4 = x_6$. Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că $x_1 = x_3 = x_5$. Atunci $ax^2 + bx + c = bx^2 + cx + a = cx^2 + ax + b$. Deducem că $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ şi $(a-c)x^2 + (b-a)x + (c-b) = 0$. Cum 1 este una din rădăcinile acestor două ecuaţii, iar $x \neq 1$ este cealaltă, adică cele două ecuaţii de gradul II au aceleaşi rădăcini, cooeficienţii lor sunt proporţionali, adică

$$\frac{a-b}{a-c} = \frac{b-c}{b-a} = \frac{c-a}{c-b}.$$

Produsul celor trei rapoarte este -1, deci fiecare din ele este -1. De aici rezultă $2a = b + c$, $2b = c + a$, $2c = a + b$, adică $a + b + c = 3a = 3b = 3c$, contradicţie. Aşadar rămâne că $x = 1$.

Problema 2. Două numere naturale nenule, diferite, se zic *relativ consistente* dacă numărul mai mare se scrie ca o sumă de divizori pozitivi distincţi ai celuilalt. Demonstraţi că există 2018 numere naturale nenule astfel încât oricare două dintre ele să fie relativ consistente.

Selim Bahadir

Soluţia 1:
Vom demonstra prin inducţie după n că pentru orice $n \geq 2$ există n numere naturale nenule astfel încât oricare două să fie relativ consistente.
Pentru $n = 2$ putem lua numerele 2 şi 3. Într-adevăr, $3 = 1 + 2$.
Fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ n numere naturale relativ consistente. Atunci, pentru orice $i < j$ există divizorii pozitivi distincţi $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ai lui x_i astfel încât $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = x_j$. Atunci, pentru orice număr natural nenul a, numerele ad_1, ad_2, ... , ad_k sunt divizori distincţi ai lui ax_i şi au suma ax_j. Aşadar $ax_1 < ax_2 < \ldots < ax_n$ sunt relativ consistente pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.
Fie b un număr natural mai mare ca x_1 şi considerăm numerele bx_1, $(b+1)x_1$, $(b+1)x_2, \ldots, (b+1)x_n$. Conform observaţiei de mai sus, numerele $(b+1)x_1$, $(b+1)x_2$, ..., $(b+1)x_n$ sunt relativ consistente. Conform ipotezei de inducţie, pentru orice $i > 1$, există nişte divizori pozitivi ai lui x_1, să zicem $d_1, d_2, \ldots, d_m$, astfel încât $x_i = d_1 + d_2 + \ldots + d_m$. Datorită modului în care a fost ales b, se vede că numerele $d_1, d_2, \ldots, d_m, bd_1, bd_2, \ldots, bd_m$ sunt divizori distincţi ai lui bx_1, iar suma acestora este $(b+1)x_i$. Astfel bx_i şi $(b+1)x_1$ sunt relativ consistente pentru orice $i > 1$. Mai mult, bx_1 şi $(b+1)x_1$ sunt şi ele relativ consistente deoarece $x_1 + bx_1 = (b+1)x_1$.

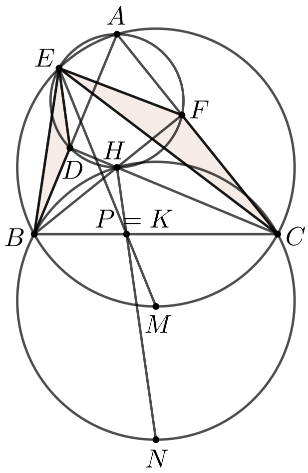
Soluţia 2: Fie $a > 1$ un număr întreg. ste uşor de verificat că a^{2017}, $a^{2017} + a^{2016}$, $a^{2017} + a^{2016} + a^{2015}$, ... , $a^{2017} + a^{2016} + \ldots + a + 1$ sunt două câte două relativ consistente.

Problema 3. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. Cercul circumscris triunghiului ABC şi cercul de diametru $[AH]$ se intersectează în punctul E, diferit de A. Fie M mijlocul arcului mic BC al cercului circumscris triunghiului ABC şi fie N mijlocul arcului mare BC al cercului circumscris triunghiului BHC. Demonstraţi că punctele E, H, M, N sunt conciclice.

Şahin Emrah

Soluţie: Fie K şi P punctele în care dreptele EM, respectiv HN, intersectează dreapta BC. Din puterea punctului faţă de cercul circumscris triunghiului ABC rezultă că $BK \cdot KC = EK \cdot KM$, iar din puterea punctului faţă de cercul circumscris triunghiului BHC rezultă $BP \cdot PC = HP \cdot PN$. Dacă demonstrăm că P coincide cu K, atunci obţinem că $EK \cdot KM = HK \cdot KN$, ceea ce, din nou cu puterea punctului, arată că punctele H, E, M, N sunt conciclice.
Din teorema bisectoarei, $P = K$ este echivalent cu $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BH}{HC}$. Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că E aparţine arcului mic AB al cercului circumscris triunghiului ABC. Dreptele AB şi CH se taie în D, iar dreptele AC şi BH se taie în F. Evident, punctele D şi F se află pe cercul de diametru $[AH]$. Un calcul de unghiuri arată că $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AFE$, deci $\sphericalangle EDB \equiv \sphericalangle EFC$. Pe de altă parte, $\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle FCE$. Asta înseamnă că $\Delta\, EDB \sim \Delta\, EFC$.
Rezultă că $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BD}{FC}$. (1)
Cum $m(\sphericalangle BDH) = m(\sphericalangle CFH) = 90^\circ$ şi $\sphericalangle DHB \equiv \sphericalangle FHC$, obţinem că $\Delta\, BDH \sim$

ΔCFH. Din asemănare rezultă $\dfrac{BD}{FC} = \dfrac{BH}{HC}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă concluzia.



Problema 4. $n \geq 3$ cutii sunt plasate pe un cerc. La primul pas alegem câteva cutii. La pasul al doilea punem câte o bilă în fiecare din cutiile alese precum şi în cele două cutii vecine acestora. (Dacă la pasul I au fost alese k cutii, $0 \leq k \leq n$, atunci la pasul II în cutii se introduc în total $3k$ bile.) Aflaţi numărul de distribuţii posibile distincte ale bilelor care se pot obţine în acest mod. (Toate bilele sunt identice.)

Azer Kerimov

Soluţie: Răspunsul este $2^{3k} + 3 \cdot 2^k + 2$, dacă $n = 3k$ şi 2^n dacă $n \neq 3k$.
Numărul de alegeri posibile ale cutiilor este 2^n. Să examinăm cazul în care două sau mai multe alegeri diferite produc aceeaşi distribuţie a bilelor. Dacă două alegeri diferite, A_1 şi A_2, produc aceeaşi distribuţie a bilelor, atunci aceste două alegeri nu coincid pe nicicare două cutii consecutive. În caz contrar, alegerile A_1 şi A_2 ar coincide şi pentru restul cutiilor. Să presupunem cutiile numerotate în sensul acelor de ceasornic cu $1, 2, \ldots, n$, iar suma $i+j$ este considerată $\pmod n$. Dacă în alegerea A cutia cu numărul m a fost aleasă, scriem $A(m) = X$, în caz contrar scriem $A(m) = Y$. Astfel, pentru două cutii vecine, m şi $m+1$, sunt patru posibilităţi: XX, XY, YX şi YY. Să observăm că dacă $A_1(m) = X$, $A_1(m+1) = X$, iar $A_2(m) = Y$, $A_2(m+1) = Y$, atunci A_1 şi A_2 nu pot produce aceeaşi distribuţie deoarece cutia m va conţine un număr diferit de bile pentru A_1 şi A_2 (2 sau 3, respectiv 0 sau 1). Astfel, sunt cel mult trei alegeri care produc o aceeaşi distribuţie. Se arată uşor că dacă n este un multiplu de 3 atunci există doar două triplete care produc aceeaşi distribuţie:

$$\begin{aligned} A_1 &= \ldots XXYXXYXXYXXY \ldots \\ A_2 &= \ldots XYXXYXXYXXYX \ldots \\ A_3 &= \ldots YXXYXXYXXYXX \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

şi

$$\begin{array}{l} A_1 = \ldots YYXYYXYYXYYX \ldots \\ A_2 = \ldots YXYYXYYXYYXY \ldots \\ A_3 = \ldots XYYXYYXYYXYY \ldots \end{array} \qquad (2).$$

În fiecare din aceste două cazuri, orice alegere poate fi obţinută translatând o alta. Evident, dacă n nu este multiplu de 3 atunci nu există asemenea triplete.
Să examinăm acum cazurile în care exact două alegeri produc o aceeaşi distribuţie.
Să observăm că pentru A_1 şi A_2, două alegeri diferite care produc aceeaşi distribuţie, există două cutii consecutive m şi $m+1$ astfel încât $A_1(m) \neq A_2(m)$ şi $A_1(m+1) = A_2(m+1)$. În caz contrar, pentru un anumit m am avea $A_1(m) = A_2(m)$, $A_1(m+2) = A_2(m+2)$, $A_1(m+4) = A_2(m+4)$, ş.a.m.d., ceea ce conduce la A_1 coincide cu A_2. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $A_1(m) = X$, $A_1(m+1) = Y$ şi $A_2(m) = Y$, $A_2(m+1) = X$. Rezultă că $A_1(m+2) = A_2(m+2) = Z$, unde Z este X sau Y. Similar, obţinem $A_1(m+3) = X$, $A_1(m+4) = Y$ şi $A_2(m+3) = Y$, $A_2(m+4) = X$, apoi că $A_1(m+5) = A_2(m+5) = Z$, unde Z poate fi X sau Y. Conchidem că, pornind de la cutia m, alegerile A_1 şi A_2 sunt $XYZ_1XYZ_2XYZ_3XYZ_4\ldots$ şi respectiv $YXZ_1YXZ_2YXZ_3YXZ_4\ldots$. Dacă n nu este multiplu de 3 atunci nu putem închide ciclic acest lanţ şi vom ajunge la o contradicţie.
Astfel, dacă n nu este multiplu de 3, atunci nu există două alegeri diferite care să producă o aceeaşi distribuţie, deci răspunsul este 2^n.
Dacă n este multiplu de 3, atunci poziţiile pe care vin Z_i-urile pot fi alese în 3 moduri. Dacă $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \ldots$ atunci cădem peste una din cele 6 alegeri din (1) sau (2). Astfel, pentru fiecare din cele $3 \cdot (2^{n/3} - 2) \cdot 2$ alegeri, există exact încă o alegere care produce aceeaşi distribuţie. Astfel, răspunsul este

$$2^n - 6 - 6(2^{n/3} - 2) + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} \cdot (2^{n/3} - 2) = 2^n - 2^{n/3} + 2.$$