Barajul nr. 1 pentru JBMO

5 mai 2018

Problema 1. Fie a, b, c numere reale distincte şi x un număr real. Ştiind că trei dintre numerele

$$ax^2 + bx + c,\ ax^2 + cx + b,\ bx^2 + cx + a,\ bx^2 + ax + c,\ cx^2 + ax + b,\ cx^2 + bx + a$$

sunt egale, demonstraţi că $x = 1$.

Problema 2. Două numere naturale nenule, diferite, se zic *relativ consistente* dacă numărul mai mare se scrie ca o sumă de divizori pozitivi distincţi ai celuilalt. Demonstraţi că există 2018 numere naturale nenule astfel încât oricare două dintre ele să fie relativ consistente.

Problema 3. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. Cercul circumscris triunghiului ABC şi cercul de diametru $[AH]$ se intersectează în punctul E, diferit de A. Fie M mijlocul arcului mic BC al cercului circumscris triunghiului ABC şi fie N mijlocul arcului mare BC al cercului circumscris triunghiului BHC. Demonstraţi că punctele E, H, M, N sunt conciclice.

Problema 4. $n \geq 3$ cutii sunt plasate pe un cerc. La primul pas alegem câteva cutii. La pasul al doilea punem câte o bilă în fiecare din cutiile alese precum şi în cele două cutii vecine acestora. (dacaă la pasul I au fost alese k cutii, $0 \leq k \leq n$, atunci la pasul II în cutii se introduc în total $3k$ bile.) Aflaţi numărul de distribuţii posibile distincte ale bilelor care se pot obţine în acest mod. (Toate bilele sunt identice.)