Problema săptămânii 97
Determinaţi tripletele x, y, z de numere reale distincte cu proprietatea că

$$\left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\} = \{x, y, z\}.$$

Olimpiadă Cehia si Slovacia, 2007

Soluţia 1:
Datorită simetriei circulare, putem trata numai cazurile $x < y < z$ şi $x < z < y$. Toate celelalte se reduc la acestea două.

Cazul 1: dacă $x < y < z$, atunci $\frac{z-x}{x-y} < -1 < \frac{y-z}{z-x} < 0 < \frac{x-y}{y-z}$, deci sistemul revine la $z-x = x(x-y)$, $y-z = y(z-x)$, $x-y = z(y-z)$. Adunând relaţiile, obţinem $x^2+2yz-z^2-2xy = 0$, adică $(x-z)(x+z-2y) = 0$, de unde $x+z = 2y$. Revenind la cele trei ecuaţii anterioare se obţine soluţia $(x, y, z) = \left(-2,\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$.

Cazul 2: dacă $x < z < y$, atunci $\frac{x-y}{y-z} < -1 < \frac{z-x}{x-y} < 0 < \frac{y-z}{z-x}$, deci sistemul devine $x-y = x(y-z)$, $z-x = z(x-y)$, $y-z = y(z-x)$. Notând $x = a$, se obţin soluţiile $(x, y, z) = \left(a,\ -\frac{1}{a+1},\ -\frac{a+1}{a}\right)$, cu $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $a \neq -1$.

Aşadar soluţiile sistemului sunt:
$\left(a,\ -\frac{1}{a+1},\ -\frac{a+1}{a}\right)$ pentru orice a diferit de 0 şi de -1,
$\left(-\frac{a+1}{a},\ a,\ -\frac{1}{a+1}\right)$ pentru orice a diferit de 0 şi de -1,
$\left(-\frac{1}{a+1},\ -\frac{a+1}{a},\ a\right)$ pentru orice a diferit de 0 şi de -1,
$\left(-2,\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(1,\ -2,\ -\frac{1}{2}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -2\right)$.

Revenind la rezolvarea sistemului de mai sus, iată o cale, poate nu cea mai simplă: rescriem $x-y = x(y-z) \Leftrightarrow x-y = xy-xz \Leftrightarrow x(1+z) = y(1+x)$ şi sistemul revine la $x(1+z) = y(1+x) = z(1+y) \overset{not}{=} k$. Atunci $1+z = \frac{k}{x}$ şi $z = \frac{k}{1+y}$, de unde $\frac{k}{x} = \frac{k+1+y}{1+y}$. Înlocuind $k = y(1+x)$ şi efectuând calculele se ajunge la $y+y^2+xy^2 = x^2y+x+xy$, deci la $(y-x)(y+1+xy) = 0$, de unde $y+1+xy = 0$. Notând $x = a$, obţinem $y = -\frac{1}{a+1}$. Analog, $z = -\frac{1}{y+1} = -\frac{a}{a+1}$. (Sau, alternativ, se poate observa şi folosi că $xyz = 1$.)

Soluţia 2: Adunând 1 fiecărui element din cele două mulţimi, obţinem că

$$\left\{\frac{x-y}{y-z}+1,\ \frac{y-z}{z-x}+1,\ \frac{z-x}{x-y}+1\right\} = \{x+1,\ y+1,\ z+1\},$$

adică

$$\left\{\frac{x-z}{y-z},\ \frac{y-x}{z-x},\ \frac{z-y}{x-y}\right\} = \{x+1,\ y+1,\ z+1\},$$

cu alte cuvinte

$$\left\{-\frac{1}{x},\ -\frac{1}{y},\ -\frac{1}{z}\right\} = \{x+1,\ y+1,\ z+1\}.$$

De aici se tratează cazuri, ca mai sus, în funcţie de câte dintre numerele x, y, z sunt pozitive.

Problem of the week no. 97

Find all pairwise distinct real numbers x, y, z such that

$$\left\{\frac{x-y}{y-z},\ \frac{y-z}{z-x},\ \frac{z-x}{x-y}\right\} = \{x, y, z\}.$$

Czech and Slovak Mathematical Olympiad, third round, 2007, pb 6

English solutions can be found on AoPS.