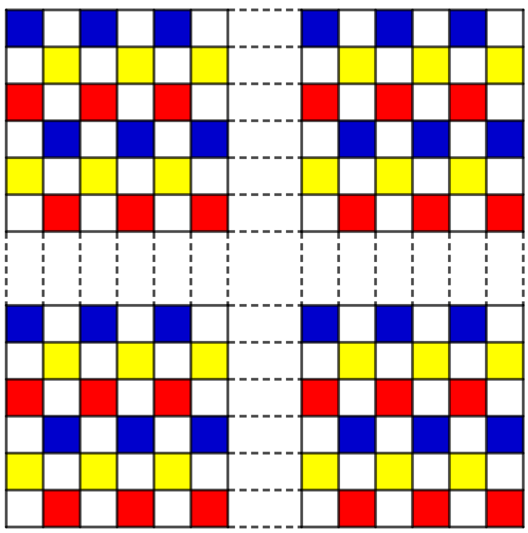
Problema săptămânii 94
Un pătrat 3000×3000 este pavat cu dominouri (adică dreptunghiuri 1×2 sau 2×1) într-un mod arbitrar. Arătaţi că putem colora dominourile cu 3 culori astfel încât numărul dominourilor de fiecare culoare este acelaşi şi fiecare domino d are cel mult doi vecini de aceeaşi culoare ca şi d. (Două dominouri se numesc vecine dacă unul din ele are un segment comun cu unul din pătrăţelele celuilalt.)

All Russian MO 2006, baraj Argentina 2007

Soluţia 1:
Numerotăm liniile şi coloanele de la 1 la 3000 şi culorile de la 1 la 3. Colorăm fiecare pătăţel situat pe linia i şi coloana j cu culoarea k aleasă astfel ca $3 \mid i + j + k$. Astfel, oricare două pătrăţele vecine au culori diferite. În fine, dacă un domino acoperă două pătrăţele ce au culorile k_1 şi k_2, colorăm dominoul cu culoarea $k_3 \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k_1, k_2\}$. Este uşor de văzut că această colorare satisface condiţiile din enunţ. (Dacă un domino ocupă pătrăţele de culori k_1 şi k_2, 4 din cele 6 pătrăţele care au latură comună cu acestea au culoarea k_3, deci dominoul ce le va acoperi nu va avea culoarea k_3. Numai cele două dominouri care acoperă celelalte două pătrăţele ar putea avea culoarea k_3.)

Soluţia 2: (*David Andrei Anghel*)
Colorăm pătratul în felul următor:



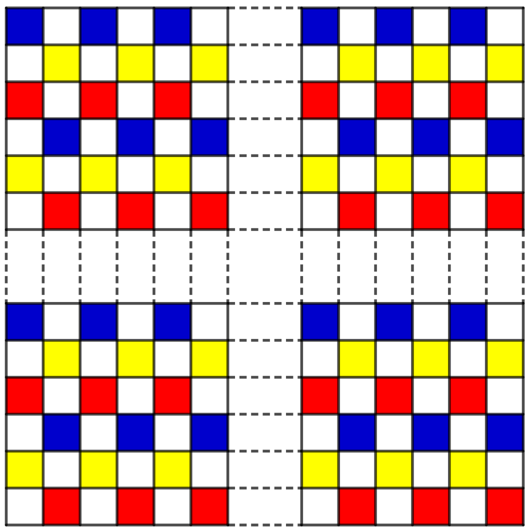
Numim pătrăţel *important* un pătrăţel unitate care a fost colorat cu una din culorile roşu, galben sau albastru. Observăm că sunt la fel de multe pătrăţele importante din fiecare culoare. Oricum am plasa un domino, el va acoperi exact un pătrăţel important. Vom colora dominoul cu culoarea pătrăţelului important pe care îl acoperă. Se verifică uşor că această colorare satisface toate condiţiile din enunţ.

Problem of the week no. 94
A 3000×3000 square is tiled with dominoes (i. e. 1×2 rectangles) in an arbitrary way. Show that one can color the dominoes in three colors such that the number of the dominoes of each color is the same, and each domino d has at most two neighbours of the same color as d. (Two dominoes are said to be neighbours if a cell of one domino has a common edge with a cell of the other one.)

All Russian MO 2006, TST Argentina 2007

Solution:
Label the rows and columns from 1 to 3000, and the colors from 1 to 3. Color each square on row i and column j with color k such that $3 \mid i + j + k$. Thus any two neighbouring squares have different colors. Finally, if the two squares covered by a domino have colors k_1 and k_2, color the domino with the color $k_3 \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k_1, k_2\}$. It is easy to check that this satisfies the requirements. (If a domino occupies two squares having colors k_1 and k_2, 4 of the 6 squares having a common side with these two squares will have color k_3, therefore the domino covering those squares will not have color k_3. Only the two dominos that cover the other two squares might be of color k_3.)

Solution 2: (*David Andrei Anghel*)
We color the square in the following fashion:



We call a unit square *important* if it has been colored with one of the colors red, yellow or blue. Notice that there are equally many important squares of each of these three colors. Also, any domino will cover exactly one important unit square. Color each domino with the color of the important unit square it covers. It is easy to check that this satisfies all the conditions.