Problema săptămânii 93
Fie $a, b, c > 0$. Arătaţi că

$$\frac{a+3b}{b+c}+\frac{b+3c}{c+a}+\frac{c+3a}{a+b}\geq 6.$$

Soluţia 1: (*David Andrei Anghel, Andrei Mărginean, Radu Lecoiu, Vlad Vergelea*)
După eliminarea numitorilor, inegalitatea din enunţ revine la $a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a\geq 2(ab^2+bc^2+ca^2)$, inegalitate care rezultă din adunarea inegalităţilor evidente $a^3+c^2a\geq 2a^2c$, $b^3+a^2b\geq 2ab^2$ şi $c^3+b^2c\geq 2bc^2$.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.
Soluţia 2: (*Marian Cucoaneş*)
Avem $\frac{a+3b}{b+c}+\frac{b+3c}{c+a}+\frac{c+3a}{a+b}-6=\frac{b(a-b)^2+c(b-c)^2+a(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, de unde obţinem inegalitatea din enunţ.

Comentariu: Inegalitatea din enunţ arată că

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+n\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\right)\geq\frac{3(n+1)}{2}$$

are loc pentru $n=3$ şi orice $a, b, c > 0$.
O întrebare naturală: care este valoarea optimă a lui n pentru care inegalitatea de mai sus este adevărată?
Vlad Vergelea ne semnalează faptul că pentru $n=5$ inegalitatea este adevărată (ea aparţinând lui *Vasile Cârtoaje*, 2007).

Problem of the week no. 93
Let $a, b, c > 0$. Prove that

$$\frac{a+3b}{b+c}+\frac{b+3c}{c+a}+\frac{c+3a}{a+b}\geq 6.$$

Solution 1: (*David Andrei Anghel, Andrei Mărginean, Radu Lecoiu*)
Eliminating the denominators reduces the inequality to $a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a\geq 2(ab^2+bc^2+ca^2)$, which follows immediately by adding $a^3+c^2a\geq 2a^2c$, $b^3+a^2b\geq 2ab^2$ and $c^3+b^2c\geq 2bc^2$.
Equality olds if and only if $a=b=c$.
Solution 2: (*Marian Cucoaneş*)
Writing $\frac{a+3b}{b+c}+\frac{b+3c}{c+a}+\frac{c+3a}{a+b}-6=\frac{b(a-b)^2+c(b-c)^2+a(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, proves the inequality directly.