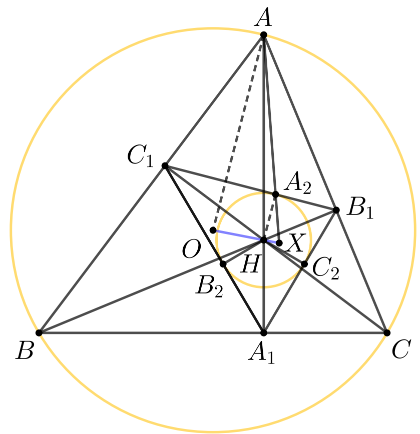
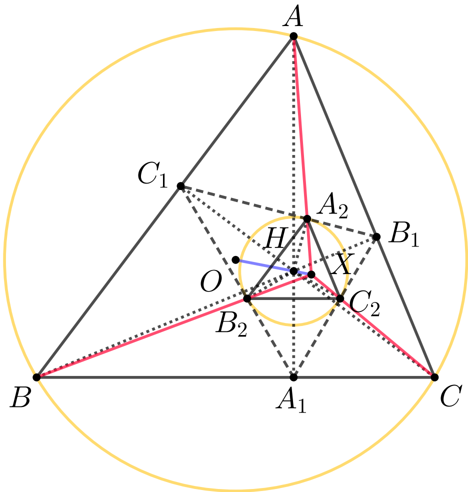
Problema săptămânii 92
Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ şi $C_1 \in (AB)$ picioarele înălţimilor, H ortocentrul triunghiului şi A_2, B_2, C_2 proiecţiile lui H pe dreptele B_1C_1, C_2A_2, respectiv A_1B_1. Demonstraţi că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente într-un punct aflat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC.

Revista KöMaL

Soluţia 1: (*Andrei Mărginean*)
Se ştie (şi se arată uşor) că H este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$. Rezultă că $HA_2 = HB_2 = HC_2$. Cum $\sphericalangle AB_1C_2 \equiv \sphericalangle ABC$, iar $m(\sphericalangle OAC) = 90° - m(\sphericalangle ABC)$, rezultă că $OA \perp B_1C_1$, deci $HA_2 \parallel OA$. Analog, $HB_2 \parallel OB$ şi $HC_2 \parallel OC$. Dacă $\{X\} = HO \cap AA_2$, din teorema fundamentală a asemănării rezultă că $\dfrac{XH}{XO} = \dfrac{HA_2}{OA}$. Analog, dacă $\{Y\} = HO \cap BB_2$ şi $\{Z\} = HO \cap CC_2$, rezultă $\dfrac{YH}{YO} = \dfrac{HB_2}{OB}$ şi $\dfrac{ZH}{ZO} = \dfrac{HC_2}{OC}$. Dar $\dfrac{HA_2}{OA} = \dfrac{HB_2}{OB} = \dfrac{HC_2}{OC}$, deci dreptele AA_2, BB_2, CC_2 şi OH sunt concurente.



Soluţia 2: (*Mihai Miculiţa, Vlad Vergelea*)
Ortocentrul H al triunghiului ABC, fiind centrul cercului înscris în $\Delta\, A_1B_1C_1$ (triunghiul ortic al $\Delta\, ABC$), avem $A_1B_2 = A_1C_2$ şi $\sphericalangle HA_1B_2 \equiv \sphericalangle HA_1C_2$, de unde $HA_1 \perp B_2C_2$. Dar şi $BC \perp HA_1$, deci $B_2C_2 \parallel BC$. Analog rezultă că $A_2B_2 \parallel AB$ şi $A_2C_2 \parallel AC$, ceea ce arată că triunghiurile $A_2B_1C_2$ şi ABC sunt atât omologice (având ca axă de omologie dreapta de la infinit a planului), cât şi omotetice (deoarece $\Delta\, A_2B_2C_2 \sim \Delta\, ABC$). Aşa că cele două triunghiuri au un centru de omologie P, unde $\{P\} = AA_2 \cap BB_2 \cap CC_2$, care este în acelaşi timp şi centru de omotetie a celor două triunghiuri.
În fine, întrucât O, centrul cercului circumscris în triunghiul ABC, este dus de această omotetie în H, centrul cercului circumscris triunghiului $A_2B_2C_2$, rezultă că $P \in OH$ (care este dreapta lui Euler a triunghiului ABC).



Remarcă: Concurenţa dreptelor AA_2, BB_2, CC_2 este o consecinţă directă a teoremei „Cevian Nest”.

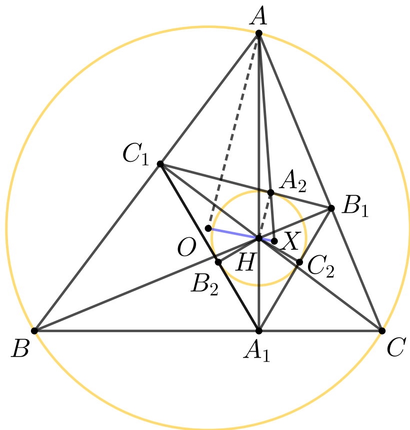
O problemă asemănătoare, dar aparent mai grea, trimisă de *Vlad Vergelea*:

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ şi $C_1 \in (AB)$ picioarele înălţimilor şi $A_3 \in B_1C_1$, $B_3 \in C_1A_1$, $C_3 \in A_1B_1$ picioarele înălţimilor în triunghiul $A_1B_1C_1$. Demonstraţi că dreptele AA_3, BB_3, CC_3 sunt concurente într-un punct aflat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC.

Problem of the week no. 92
Let ABC be an acuteangled triangle, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ and $C_1 \in (AB)$ be the feet of its altitudes, H its orthocenter, and A_2, B_2, C_2 the orthogonal projections of H onto B_1C_1, C_2A_2, and A_1B_1, respectively. Prove that the lines AA_2, BB_2, CC_2 are concurrent in a point belonging to the Euler-line of triangle ABC.

KöMaL Magazine, Problem B. 4812. (September 2016)

Solution:(*Andrei Mărginean*)
It is well known that H is the incenter of triangle $A_1B_1C_1$. It follows that $HA_2 = HB_2 = HC_2$. As $\sphericalangle AB_1C_2 = \sphericalangle ABC$, and $\sphericalangle OAC = 90^\circ - \sphericalangle ABC$, we obtain that $OA \perp B_1C_1$, i.e. $HA_2 \parallel OA$. Similarly, $HB_2 \parallel OB$ and $HC_2 \parallel OC$. If $\{X\} = HO \cap AA_2$, from similarity we get $\dfrac{XH}{XO} = \dfrac{HA_2}{OA}$. Similarly, if $\{Y\} = HO \cap BB_2$ and $\{Z\} = HO \cap CC_2$, then $\dfrac{YH}{YO} = \dfrac{HB_2}{OB}$ and $\dfrac{ZH}{ZO} = \dfrac{HC_2}{OC}$. But $\dfrac{HA_2}{OA} = \dfrac{HB_2}{OB} = \dfrac{HC_2}{OC}$, which means that the lines AA_2, BB_2, CC_2 and OH concur.



A
C_1
A_2
B_1
O
X
H
C_2
B_2
B
A_1
C