**Problema săptămânii 91**
Determinaţi perechile de numerele naturale $(n, k)$, $n \geq 2$, cu proprietatea că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1+a_2+\ldots+a_n = k$ şi $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = -m$.

*Alexandru Mihalcu*

(generalizare a problemei 1 de la barajul 1, Bucureşti, 2018)
**Soluţie:**
Pentru $n \geq 5$, putem găsi uşor un exemplu pentru orice număr $k$. De exemplu: $a_1 = m$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $a_4 = k - m + 1$, $a_5 = 0$, $\ldots$ , $a_n = 0$.
Pentru $n = 4$, renotăm numerele cu $a$, $b$, $c$, $d$. Astfel, înlocuind $d + b = k - (a + c)$ în $ab + bc + cd + da = -m$ obţinem $(a + c)(b + d) = (a + c)(k - a - c) = -m \Rightarrow (a + c)(a + c - k) = m$. Pentru $m = 1$ observăm că trebuie să avem $k = 0$, dar pentru $k = 0$ relaţia este echivalentă cu $(a + c)^2 = m$, ceea ce evident nu poate fi satisfăcută pentru cazurile în care $m$ nu este pătrat perfect. Deci pentru $n = 4$ nu avem soluţii.
Pentru $n = 3$, avem $a + b + c = k$, $ab + bc + ca = -m$. Prin urmare $a^2 + b^2 + c^2 = k^2 + 2m$, ceea ce înseamnă că începând de la $k^2$, toate numerele de paritatea acestuia se pot scrie ca sumă de 3 pătrate perfecte. Însă există numere oricât de mari de ambele parităţi ce nu se pot scrie ca sumă de 3 pătrate: de exemplu numerele de forma $8k + 7$, respectiv cele de forma $32k + 28$.
Eventual se poate folosi şi următoarea lemă:
Un număr se scrie ca sumă de 3 pătrate perfecte dacă şi numai dacă el nu este de forma $4^a(8k + 7)$.
Prin urmare, nici pentru $n = 3$ nu avem soluţii.
Pentru $n = 2$ este evident că $m$ nu poate fi impar, deci nici în acest caz nu avem soluţii.
Concludem prin a enunţa singurele soluţii, perechile de forma $(n, k)$, cu $n \geq 5,\ k \in \mathbb{N}$.

**Problem of the week no. 91**
Determine all pairs of positive integers $(n, k)$, $n \geq 2$, such that, for all $m \in \mathbb{N}$, there exist integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ and $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = -m$.

*Alexandru Mihalcu*

**Solution:**
For $n \geq 5$ we can easily find an example for all $k$: $a_1 = m$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $a_4 = k - m + 1$, $a_5 = 0$, $\ldots$ , $a_n = 0$.
For $n = 4$, renaming the numbers $a$, $b$, $c$, $d$ and plugging $d + b = k - (a + c)$ into $ab + bc + cd + da = -m$ we obtain $(a + c)(b + d) = (a + c)(k - a - c) = -m \Rightarrow (a + c)(a + c - k) = m$. For $m = 1$ we need to have $k = 0$, but for $k = 0$ the above

equality comes to $(a+c)^2 = m$, which cannot be satisfied if $m$ is not a perfect square. Thus, for $n = 4$ there are no solutions.
For $n = 3$, we have $a+b+c = k$, $ab+bc+ca = -m$. Then $a^2+b^2+c^2 = k^2+2m$, which means that, beginning with $k^2$, al the numbers of the same parity as $k^2$ can be written as sums of three squares. But there are numbers of both parities, arbitrarily large, that cannot be written as sums of three perfect squares: for example the numbers of the forms $8k+7$ and $32k+28$.
One can also use the following lemma:
A number can be written as a sum of three perfect squares if and only if it can be represented as $4^a(8k+7)$, where $a, k \geq 0$ are integers.
In conclusion, for $n = 3$ there are no solutions either.
For $n = 2$ it is obvious that $m$ cannot be odd, therefore there are no solution with $n = 2$.
In conclusion, the only convenient pairs are $(n,k)$, with $n \geq 5,\ k \in \mathbb{N}$.