Problema BJ3 (a 61-a OM din Rep.MOLDOVA, din 6 martie 2017)([1]):

> **Fie ABC – un triunghi dreptunghic în A. Notăm cu T – punctul de intersecţie al tangentelor duse prin vârfurile A şi B la cercul circumscris triunghiului ABC, cu D – piciorul înălţimii duse din vârful unghiului drept; iar cu: $\{M\}=[AD]\cap[CT]$.**
>
> **Arătaţi că:** $[MA]\equiv[MD]$.

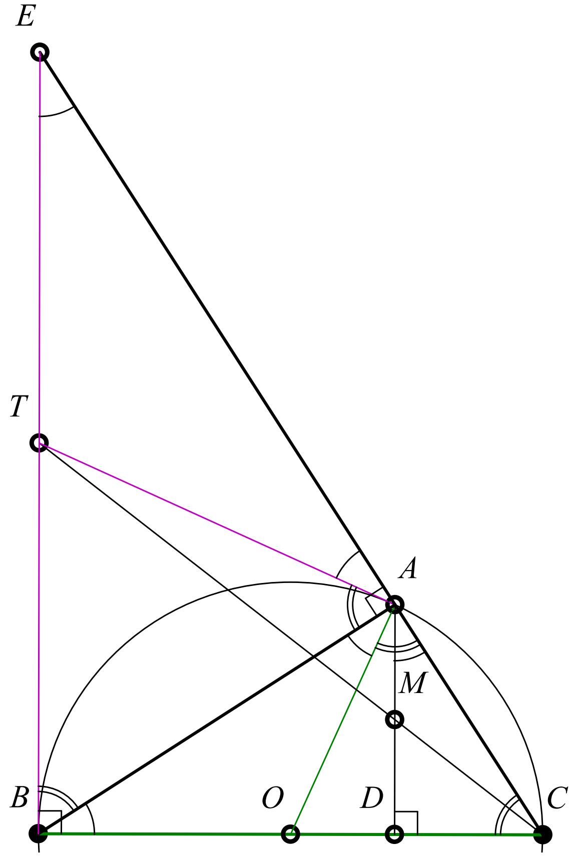

Fig.1.

SOLUŢIA I.(*Mihai Miculiţa*): Notând cu O – mijlocul ipotenuzei $[BC]$ (centrul cercului $\odot ABC$) şi cu $\{E\}=AC\cap BT$, avem (v.Fig.1):

$$\left.\begin{array}{r} AB\perp AC \\ [OB]\equiv[OC] \end{array}\right\}\Rightarrow[OA]\equiv[OB]\equiv[OC]\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll} m\left(\widehat{OAB}\right)=m\left(\widehat{OBA}\right)=B; & (1) \\ m\left(\widehat{OAC}\right)\equiv m\left(\widehat{OCA}\right)=C; & (2) \end{array}\right. \text{ şi } B+C=90^0. \quad (3)$$

Pe de altă parte, întrucât:

$$\left.\begin{array}{r} TA\cap\odot ABC=\{A\} \\ TB\cap\odot ABC=\{B\} \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} [TA]\equiv[TB]; \quad (4) \\ m\left(\widehat{TAB}\right)=m\left(\widehat{TBA}\right)=m\left(\widehat{BAC}\right)=B. \quad (5) \end{array}\right.$$

Însă din:

$$AB\perp AE(=AC)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} m\left(\widehat{AEB}\right)=90^0-m\left(\widehat{TBA}\right)=90^0-C \\ m\left(\widehat{TAE}\right)=90^0-m\left(\widehat{TAB}\right)=90^0-C \end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{AEB}\equiv\widehat{TAB}\Rightarrow[TA]\equiv[TE]. \quad (6)$$

În fine, din:

$$\left.\begin{array}{r} (4)\text{ şi }(6)\Rightarrow[TB]\equiv[TE] \\ EB, AD\perp BC\Rightarrow EB\parallel AD \\ \{M\}=[AD]\cap[CT] \end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{[MA]\equiv[MD]}.\ \blacksquare$$

---

[1] Miculiţa, enunţ uşor modificat, fără a afecta esenţa problemei.

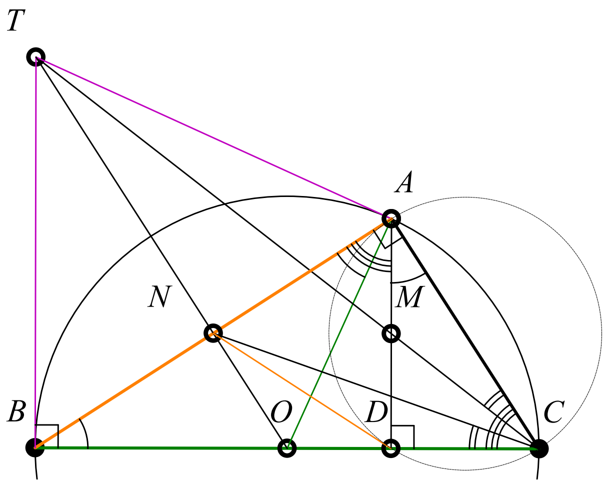

Fig.2.

SOLUŢIA a II-a(*Ion Pătraşcu*): Notând cu $O-$mijlocul ipotenuzei $[BC]$(centrul cercului $\odot ABC$) şi cu $\{N\}=[AB]\cap OT$, avem (v.Fig.2):

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}[OA]\equiv[OB]\\ [TA]\equiv[TB]\end{array}\right\}\Rightarrow OT-\textit{mediatoarea lui}\,[AB]\Rightarrow[NA]\equiv[NB]\Rightarrow[CN]-\textit{mediană în}\ \Delta ABC\\ [CT]-\textit{simediană în}\ \Delta ABC\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\widehat{NCB}\equiv\widehat{MCA}.\quad(1)$$

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AD\perp BC\\ [NA]\equiv[NB]\end{array}\right\}\Rightarrow[NA]\equiv[ND]\Rightarrow\widehat{DAN}\equiv\widehat{NDA}\\ \left.\begin{array}{r}AB\perp AC\\ AD\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{DAN}\equiv\widehat{DCA}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{DAN}\equiv\widehat{NDA}\equiv\widehat{DCA}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}NA\cap\odot DCA=\{A\}\\ ND\cap\odot DCA=\{D\}\end{array}\right\}\Rightarrow[CN]-\textit{simediană în}\ \Delta ADC\\ \widehat{NCB}\equiv\widehat{MCA}\ (1)\end{array}\right\}\Rightarrow[CM]-\textit{mediană în}\ \Delta ADC\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{[MA]\equiv[MD]}.\blacksquare$$

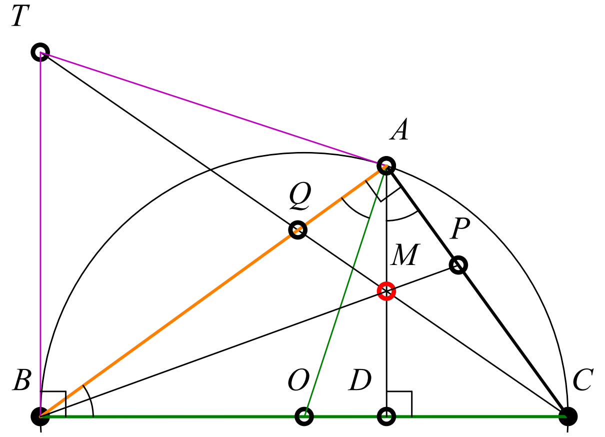

Fig.3.

SOLUŢIA a III-a (*Titu Zvonaru*): Notând cu $O-$mijlocul ipotenuzei $[BC]$(centrul cercului $\odot ABC$); iar cu $\{P\}=[AC]\cap BM$ şi $\{Q\}=[AB]\cap CT$, avem (v.Fig.3):

$$\left.\begin{array}{r}AT\cap\odot ABC=\{A\}\\ BT\cap\odot ABC=\{B\}\end{array}\right\}\Rightarrow CT-\textit{simediană în}\ \Delta ABC;\quad(1)$$

şi

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AB \perp AC\\ AD \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CAD} \equiv \widehat{ABO}\\ \left.\begin{array}{r}AD \perp BC\\ [OB] \equiv [OC]\end{array}\right\} \Rightarrow [OA] \equiv [OB] \Rightarrow \widehat{OAB} \equiv \widehat{ABO}\end{array}\right\} \Rightarrow AD - \textit{simediană în } \Delta ABC. \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2), rezultă că punctul M – este centrul simedian (punctul lui LEMOINE) al $\Delta ABC \Rightarrow$ dreapta $BP - \textit{simediană în } \Delta ABC.$ (3)

În fine, ţinând acum seama de (3) şi (1), obţinem că:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{|PA|}{|PB|} = \dfrac{|AC|^2}{|BC|^2}\\ AD \cap CP \cap BQ = \{M\}\\ \dfrac{|QA|}{|QC|} = \dfrac{|AB|^2}{|BC|^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|PA|}{|PB|} + \frac{|QA|}{|QC|} = \frac{|AB|^2 + |AC|^2}{|BC|^2} = \frac{|BC|^2}{|BC|^2} = 1 \Rightarrow [MA] \equiv [MD]. \blacksquare$$