Hexagonul cu laturile opuse paralele

Problema 1: Laturile opuse ale hexagonului convex ABCDEF sunt paralele două cate două. Sa se arate ca ariile triunghiurilor ACE si BDF sunt egale, valoarea lor comună fiind cel puțin jumate din aria hexagonului.

Solutie(M.Miculița):

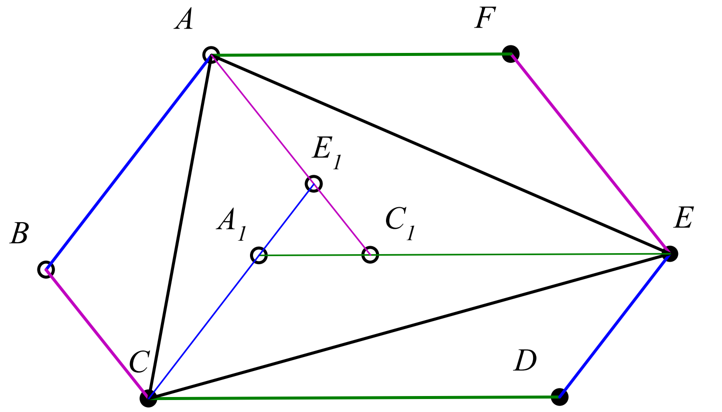


Fig.1.

Prin vârfurile A, B, C, …,F ducem dreptele $a, b, c, \ldots, f$, astfel încât să avem:

$$a \parallel d \parallel BC \parallel EF;\ c \parallel f \parallel AB \parallel DE;\ e \parallel b \parallel AF \parallel CD.$$

Notăm apoi cu: $\{A_1\} = c \cap e;\ \{C_1\} = a \cap e;\ \{E_1\} = a \cap c;\ \{B_1\} = d \cap f;\ \{D_1\} = b \cap f;\ \{F_1\} = b \cap d.$

Să observăm acum, că patrulaterele $ABCE_1, CDEA_1, EFAC_1$ -fiind paralelograme, urmează că:

$$S_{ACE} = S_{ACE_1} + S_{CEA_1} + S_{AEC_1} + S_{A_1C_1E_1} = \frac{1}{2}.S_{ABCDEF} + S_{A_1C_1E_1} \geq \frac{1}{2}.S_{ABCDEF}. \qquad (1)$$

În mod analog se arată că: $S_{BDE} = \frac{1}{2}.S_{ABCDEF} + S_{B_1D_1F_1} \geq \frac{1}{2}.S_{ABCDEF}.$ (2)

Pe baza relațiilor (1) şi (2), avem acum: $S_{ACE} = S_{BDF} \Leftrightarrow S_{A_1C_1E_1} = S_{B_1D_1F_1}.$ (3)

Avem însă:

$$A_1C_1 = |AF - CD| = D_1F_1;\ C_1E_1 = |BC - EF| = B_1F_1;\ A_1E_1 = |AB - DE| = B_1D_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta A_1C_1E_1 \equiv \Delta D_1F_1B_1 \Rightarrow S_{A_1C_1E_1} = S_{B_1D_1F_1}.$$

Observație(MM): Dacă în plus avem şi: |AB|=|DE|, |BC|=|EF| şi |CD|=|AF|, atunci:

$S_{ACE} = S_{BDF} = \dfrac{S_{ABCDEF}}{2}.$

Problema 2: Fie ABCDEF un hexagon având laturile opuse paralele. Notăm cu M, N, P, Q, R şi cu S mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] şi respectiv [AF]. Să se arate că dreptele MQ, NR şi PS, care unesc mijloacele laturilor opuse, sunt concurente! (**Kvant nr.1/1986, pag.34, problema 963; soluția sa a apărut în nr.5/1986**).

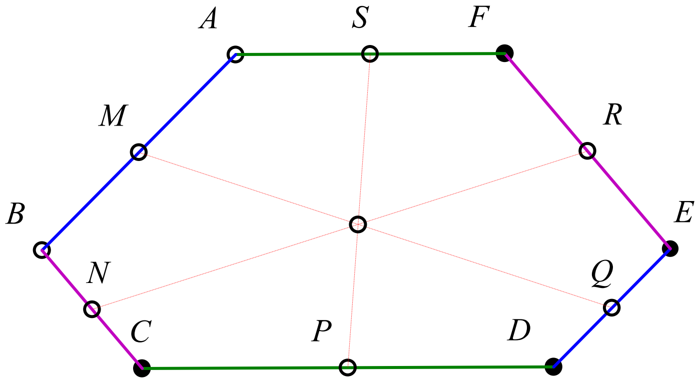


Fig.2.

SOLUȚIE(folosind ideea soluției din **Kvant nr. 5/1986; pag.31 si 34**):

Lemă: *Fiind dat un trapez* ABCD *şi notând cu* M *şi* N *mijloacele bazelor* [AB] *şi* [CD]; *mediana* MN *este locul geometric al tuturor punctelor* X, *având proprietatea*: $S_{XAC} = S_{XBD}$.

Demonstrație(MM): Este cunoscut faptul că dacă $\{O\} = [AC] \cap [BD]$, atunci avem $O \in MN$.

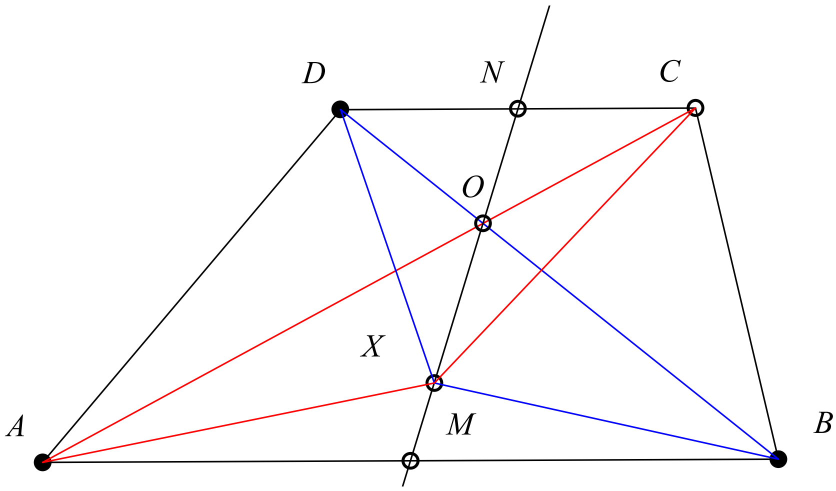


Fig.3

Dacă $X \in MN; X \notin \{M, N, O\}$, atunci avem:

$$|MA| = |MB| \Rightarrow \begin{cases} S_{OAM} = S_{OBM} \\ S_{XAM} = S_{XBM} \end{cases} \Rightarrow S_{XOA} = S_{OAM} - S_{XAM} = S_{OBM} - S_{XBM} = S_{XOB}. \quad (1)$$

În mod analog se arată că: $S_{XOC} = S_{XOD}$;   (2)

şi adunând acum relațiile (1) şi (2), membru cu membru, obținem că:

$S_{XAC} = S_{XOA} + S_{XOC} = S_{XOB} + S_{XOD} = S_{XBD}$.

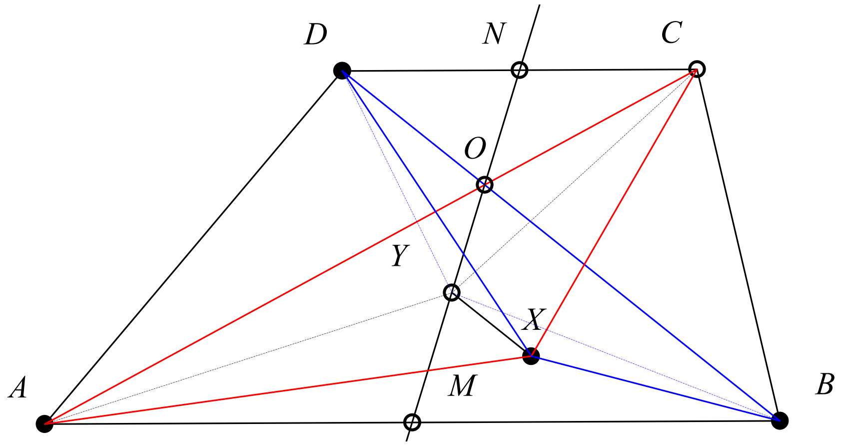


Fig.4.

Dacă $X \notin MN$, atunci notând cu Y punctul în care paralela dusă prin punctul X la dreapta BD intersectează diagonala AC şi $X \in Int(\Delta YAC)$ sau $Y \in Int(\Delta XAC)$. În cayul **Fig.4** are loc a doua alternativă şi avem:

$$XY \parallel BD \Rightarrow S_{XBD} = S_{YBD} \Rightarrow S_{XAC} > S_{YAC} = S_{YBD} = S_{XBD} \Rightarrow S_{XBD} > S_{XBD};$$
$$\left(X \in Int(\Delta YAC) \Rightarrow S_{XBD} > S_{XBD}\right).$$

Revenind la **problema 2** şi notând cu $\{O\} = MQ \cap NR$, avem potrivit lemei demostrate:

$$\left.\begin{array}{l} O \in MN \Rightarrow S_{OAD} = S_{OBE} \\ O \in NR \Rightarrow S_{OBE} = S_{OCF} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{OAD} = S_{OCF} \Rightarrow O \in PS. \square$$

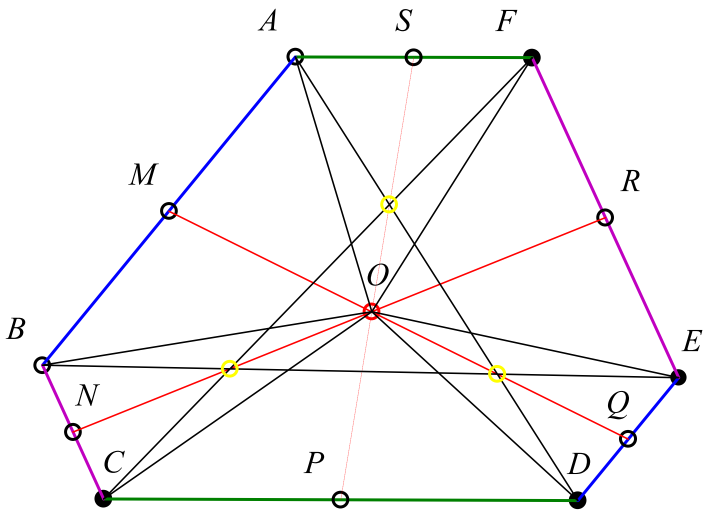


Fig.5.

O problemă mai generală, este următoarea:

Problema 3: În hexagonul ABCDEF dreptele MQ, NR şi PS, care unesc mijloacele laturilor opuse, sunt concurente atunci şi numai atunci când, triunghiurile ACE şi BDF sunt echivalente. (**Kvant, nr.2 /1992,pag.20; problema 1329 şi sol. în nr.8/1992, pag.34-35**)

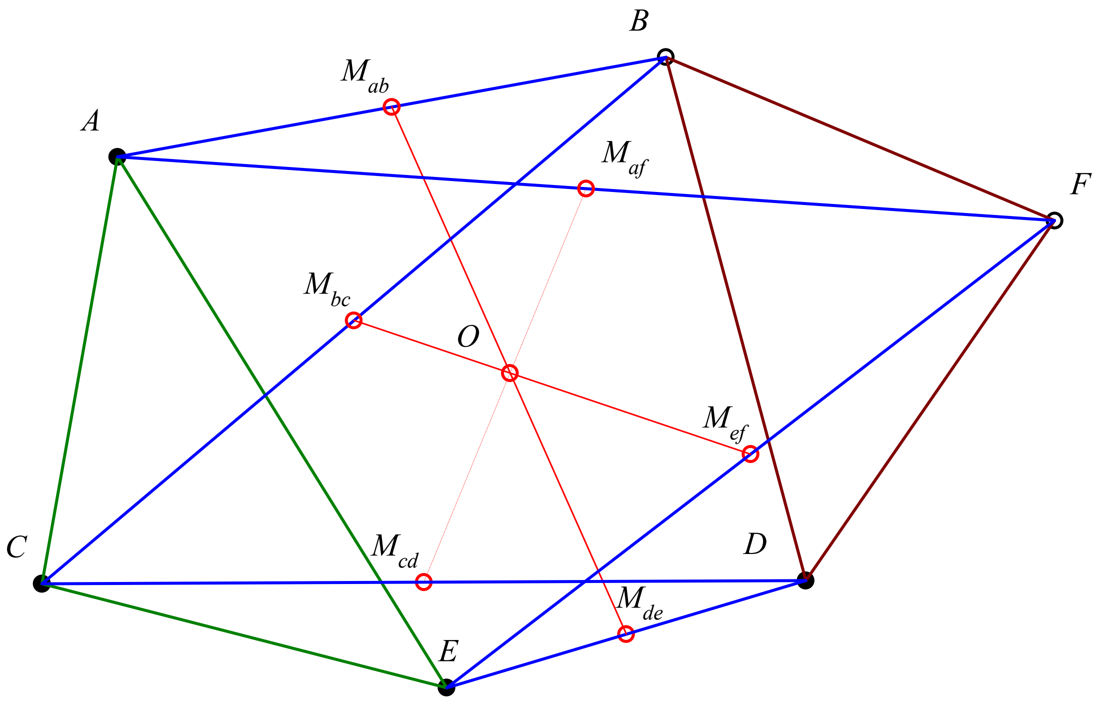


Fig.6.

Soluție: Notând cu $\{O\} = M_{ab}M_{de} \cap M_{bc}M_{ef}$ şi cu $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$, avem:

$$\boxed{S_{ACE} = S_{BDF}} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{e}+\vec{e}\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{d}+\vec{d}\times\vec{f}+\vec{f}\times\vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = \left(\underline{\underline{\vec{a}\times\vec{d}}}+\vec{a}\times\vec{e}+\vec{b}\times\vec{d}+\underline{\vec{b}\times\vec{e}}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}+\underline{\underline{\vec{c}\times\vec{f}}}+\underline{\underline{\vec{d}\times\vec{a}}}+\vec{d}\times\vec{f}\right)+\left(\underline{\vec{e}\times\vec{b}}+\vec{e}\times\vec{c}+\vec{f}\times\vec{b}+\underline{\underline{\vec{f}\times\vec{c}}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{d}+\vec{e}\right)+\left(\vec{c}+\vec{d}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{f}\right)+\left(\vec{e}+\vec{f}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{OM_{ab}}\times\overrightarrow{OM_{de}}+\overrightarrow{OM_{cd}}\times\overrightarrow{OM_{af}}+\overrightarrow{OM_{ef}}\times\overrightarrow{OM_{bc}} = \vec{0}.} \quad (1)$$

Pe de altă parte, avem:

$$(2) \quad \boxed{O \in M_{ab}M_{de}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_{ab}}\times\overrightarrow{OM_{de}} = \vec{0} \quad \text{şi} \quad \boxed{O \in M_{bc}M_{ef}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_{bc}}\times\overrightarrow{OM_{ef}} = \vec{0}. \quad (3)$$

(i).Din relațiile (1), (2) şi (3) rezultă acum că:

$$\overrightarrow{OM_{cd}}\times\overrightarrow{OM_{af}} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{O \in M_{cd}M_{af}}. \quad (4)$$

(ii). În mod reciproc, din relațiile (2), (3) şi (4), rezultă (1).□

Problema 4: Fie ABCDEF un hexagon având laturile opuse paralele. Notăm cu M, N, P, Q, R şi cu S acele puncte ale laturilor [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] şi respectiv [AF], care sunt determinate prin relațiile următoare:

$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|AF|}{|BC|}; \frac{|NB|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|CD|}; \frac{|PC|}{|PD|} = \frac{|BC|}{|DE|}; \frac{|QD|}{|QE|} = \frac{|CD|}{|EF|}; \frac{|RE|}{|RF|} = \frac{|DE|}{|FA|}; \frac{|SF|}{|SA|} = \frac{|EF|}{|AB|}.$$

Să se arate că dreptele MQ, NR şi PS, care unesc mijloacele laturilor opuse, sunt concurente! (*Mihai Miculița*)

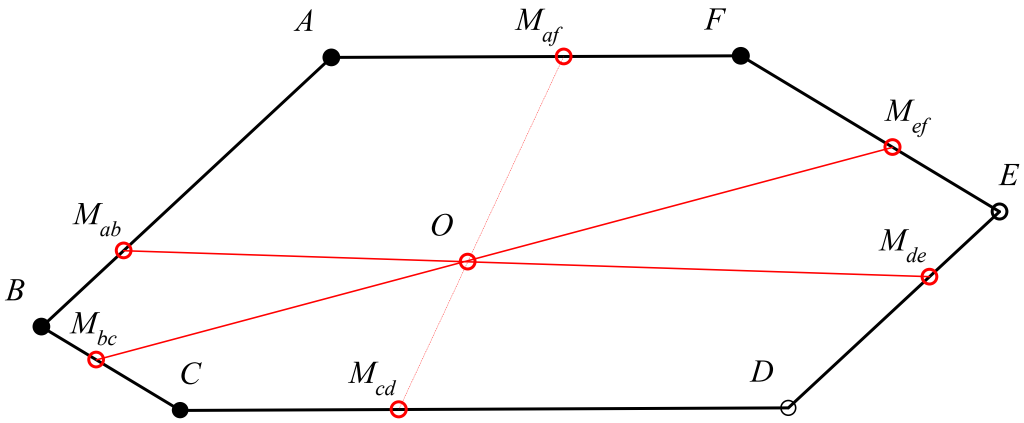


Fig.7.

SOLUȚIE: Notând cu $\{O\} = M_{ab}M_{de} \cap M_{bc}M_{ef}$ și cu $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$, avem:

$$O \in M_{ab}M_{de} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_{ab}} \times \overrightarrow{OM_{de}} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(|BC|.\vec{a} + |AD|.\vec{b}\right) \times \left(|EF|.\vec{d} + |CD|.\vec{e}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{|BC|.|EF|.\left(\vec{a}\times\vec{d}\right) + |BC|.|CD|.\left(\vec{a}\times\vec{e}\right) + |AD|.|EF|.\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) + |AD|.|CD|.\left(\vec{b}\times\vec{e}\right) = \vec{0};} \quad (1)$$

$$O \in M_{bc}M_{ef} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_{bc}} \times \overrightarrow{OM_{ef}} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(|CD|.\vec{b} + |AB|.\vec{c}\right) \times \left(|AF|.\vec{e} + |DE|.\vec{f}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{|CD|.|AF|.\left(\vec{b}\times\vec{e}\right) + |CD|.|DE|.\left(\vec{b}\times\vec{f}\right) + |AB|.|AF|.\left(\vec{c}\times\vec{e}\right) + |AB|.|DE|.\left(\vec{c}\times\vec{f}\right) = \vec{0};} \quad (2)$$

$$O \in M_{cd}M_{af} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_{cd}} \times \overrightarrow{OM_{af}} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(|DE|.\vec{c} + |BC|.\vec{d}\right) \times \left(|EF|.\vec{a} + |AB|.\vec{f}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{|DE|.|EF|.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + |DE|.|AB|.\left(\vec{c}\times\vec{f}\right) + |BC|.|EF|.\left(\vec{d}\times\vec{a}\right) + |BC|.|AB|.\left(\vec{d}\times\vec{f}\right) = \vec{0}.} \quad (3)$$

Din relațiile (1) și (2), rezultă:

$$\left.\begin{array}{l} |BC|.|EF|.\left(\vec{a}\times\vec{d}\right) + |BC|.|CD|.\left(\vec{a}\times\vec{e}\right) + |AD|.|EF|.\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) + |AD|.|CD|.\left(\vec{b}\times\vec{e}\right) = \vec{0} \\ |CD|.|AF|.\left(\vec{b}\times\vec{e}\right) + |CD|.|DE|.\left(\vec{b}\times\vec{f}\right) + |AB|.|AF|.\left(\vec{c}\times\vec{e}\right) + |AB|.|DE|.\left(\vec{c}\times\vec{f}\right) = \vec{0} \end{array}\right| \begin{array}{l} .|AF| \\ .(-|AD|) \end{array}$$

$$|AF|.|BC|.|EF|.\left(\vec{a}\times\vec{d}\right) + |AF|.|BC|.|CD|.\left(\vec{a}\times\vec{e}\right) + |AF|.|AD|.|EF|.\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) -$$

$$-|AD|.|CD|.|DE|.\left(\vec{b}\times\vec{f}\right) - |AD|.|AB|.|AF|.\left(\vec{c}\times\vec{e}\right) - |AD||AB|.|DE|.\left(\vec{c}\times\vec{f}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

Pe de altă parte:

$$AB \parallel DE \Leftrightarrow \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{d}-\vec{e}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{d} + \vec{b}\times\vec{e} = \vec{a}\times\vec{e} + \vec{b}\times\vec{d}; \quad (4)$$

$$BC \parallel EF \Leftrightarrow \left(\vec{b}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{e}-\vec{f}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b}\times\vec{e} + \vec{c}\times\vec{f} = \vec{c}\times\vec{e} + \vec{b}\times\vec{f}; \quad (5)$$

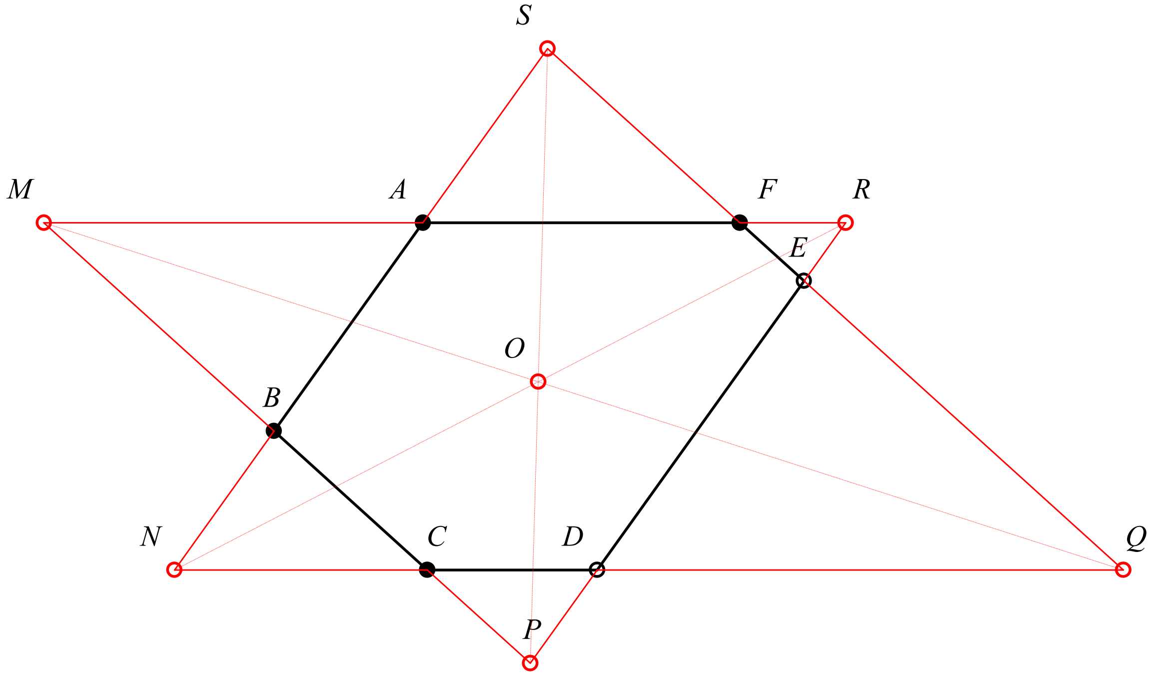
$$CD \parallel AF \Leftrightarrow \left(\vec{c}-\vec{d}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{f}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{c}\times\vec{a} + \vec{d}\times\vec{f} = \vec{c}\times\vec{f} + \vec{d}\times\vec{a}. \quad (6)$$

$$\Rightarrow 2.\vec{a}\times\vec{d} + 2.\vec{b}\times\vec{e} + \vec{c}\times\vec{a} + \vec{d}\times\vec{f} = \vec{a}\times\vec{e} + \vec{b}\times\vec{d} + \vec{c}\times\vec{e} + \vec{b}\times\vec{f}.$$

Hexagram
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=360831&p1974796&#p1974796

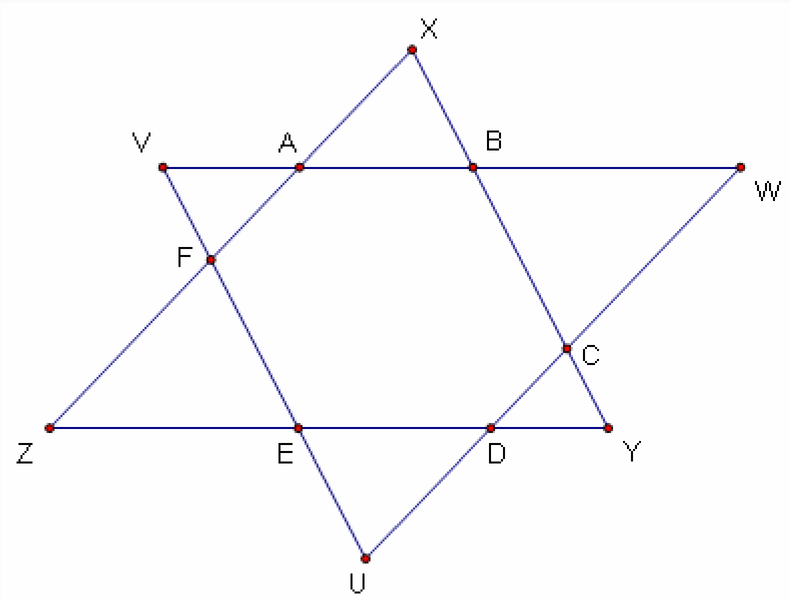
dyd
Posts: 64

Let $ABCDEF$ be a convex hexagon with $AB//DE$, $BC//EF$ and $CD//FA$. Extending the 6 edges of this hexagon until they meet at 6 new vertices creates 6 new triangles, each erected externally relative to the hexagon. Prove that the total area of these triangles is not smaller than the area of hexagon.
Are there any well-known theorem(s) related to this question? I'm sure it's an old result, but I can't find any reference to that. Thx.



Adică: $$\left.\begin{array}{r} AB \parallel DE \\ BC \parallel EF \\ CD \parallel AF \end{array}\right\} \Rightarrow S_{MAB} + S_{NBC} + S_{PCD} + S_{QDE} + S_{REF} + S_{SAF} \geq S_{ABCDEF}.$$

dyd
Posts: 69



We have all those 8 triangles are similar. So we have

$$\frac{[ABX]}{[XYZ]}+\frac{[BCW]}{[XYZ]}+\frac{[CDY]}{[XYZ]}\geq\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{[ABX]}{[XYZ]}}+\sqrt{\frac{[BCW]}{[XYZ]}}+\sqrt{\frac{[CDY]}{[XYZ]}}\right)^2=$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{BX}{XY}+\frac{BC}{XY}+\frac{CY}{XY}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

So

$$[ABX]+[BCW]+[CDY]\geq\frac{[XYZ]}{3}$$

Analog, we have

$$[CDY]+[DEU]+[EFZ]\geq\frac{[XYZ]}{3}$$

and

$$[EFZ]+[FAV]+[ABX]\geq\frac{[XYZ]}{3}.$$

Adding these three ineqs solves the problem.
Equality happens when $XB=BC=CY$ etc. In this case, all main diagonal (such as AD) will be parallel to the non-neighboring sides as well. Also, like Vikernes said above, these diagonals are concurrent. But then parallel condition only, or concurrent condition only, will not sufficient for equality to occur.

HEXAGON(Probleme din Kvant): 1106 sol in nr.10/1988; 1674 sol în nr.3/1997; 1579 sol. în nr.4/1997; 2070/2008.