Problema săptămânii 87

Să presupunem că toate numerele întregi au fost colorate cu una din culorile roşu, verde şi albastru astfel încât fiecare număr a fost colorat cu exact una din aceste culori. De asemenea, să presupunem că suma oricăror două numere verzi este un număr albastru, că suma oricăror două numere albastre este verde, că opusul oricărui număr verde este albastru şi că opusul oricărui număr albastru este verde. În fine, ştiind că 1492 este roşu şi 2011 este verde, stabiliţi care numere întregi sunt roşii, care sunt verzi şi care sunt albastre.

Soluţie:

Răspunsul este: numerele verzi sunt cele de forma $(3m+1)2011$, cele albastre sunt numerele de forma $(3m+2)2011$ cu m un număr întreg arbitrar. Celelalte numere sunt roşii.

Să observăm că 0 trebuie să fie roşu deoarece dacă 0 ar fi verde (albastru), ar rezulta că $0+0=0$ ar fi albastru (verde). De asemenea, dacă n este roşu, atunci $-n$ este tot roşu (căci dacă $-n$ ar fi verde atunci $n=-(-n)$ ar fi albastru şi invers). Astfel, este suficient să stabilim culoarea fiecărui număr întreg pozitiv.

Fie x cel mai mic număr natural nenul care nu este roşu. Să presupunem deocamdată că este verde. Atunci $2x=x+x$ este albastru, $4x=2x+2x$ este verde, $5x=4x+x$ este albastru, etc. Se arată uşor prin inducţie după $k\geq 0$, că $(3k+1)x$ este verde şi $(3k+2)x$ este albastru.

Arătăm în continuare că toţi ceilalţi multipli ai lui x, adică numerele de forma $3kx$, sunt roşii. Dacă $3kx$ este verde, atunci $(3k+1)x=3kx+x$, ar fi albastru, contradicţie. Similar dacă $3kx$ este albastru. Rămâne că $3kx$ este roşu.

Arătăm acum că orice număr care nu este multiplu al lui x trebuie să fie roşu. Fie $y>0$ un număr care nu este multiplu al lui x. Atunci şirul x, $2x$, $4x$, $5x$, $7x$, $8x$, $10x$, $11x$, $13x$, $14x$, $\ldots$ conţine numere care sunt alternativ verzi şi albastre. Dacă $y<x$ atunci y este roşu pentru că x este cel mai mic număr natural care nu este roşu. Dacă y este cuprins între doi termeni consecutivi ai şirului care diferă prin x: $(3k+1)x<y<(3k+2)x$, atunci: dacă y este albastru, cum $-(3k+1)x$ este albastru, $y-(3k+1)x$ este verde. Dar inegalitatea de mai sus implică $0<y-(3k+1)x<x$, contrazicând faptul că x este cel mai mic număr natural care nu este roşu. Dacă y este verde $-y$ este albastru, deci $-y+(3k+2)x$ este verde. Dar $0<-y+(3k+2)x<x$, ceea ce conduce la aceeaşi contradicţie. Aşadar y trebuie să fie roşu.

Rămâne cazul în care y este cuprins între doi termeni consecutivi ai şirului, termeni care diferă prin $2x$: $(3k+2)x<y<(3k+4)x$. În acest caz, dacă y este verde, atunci $y-(3k+2)x$ este albastru, iar dacă y este albastru, atunci $(3k+4)x-y$ este albastru. Cum $0<y-(3k+2)x<2x$ şi $0<(3k+4)x-y<2x$, în ambele cazuri rezultă că avem un număr albastru cuprins între 0 şi $2x$. Însă din cazul anterior am văzut că nu putem avea numere albastre între x şi $2x$ şi, cum x este cel mai mic număr natural care nu este roşu, nu putem avea numere albastre mai mici ca x. În fine, niciunul din numerele $y-(3k+2)x$ şi $(3k+4)x-y$ nu poate fi egal cu x findcă y nu este multiplu de x. Contradicţia obţinută ne arată că y este roşu.

Ştim acum că singurele numere naturale care nu sunt roşii sunt multiplii lui x care sunt de formele $(3k+1)x$ şi $(3k+2)x$. Ştim că 2011 este albastru, deci 2011 este un asemenea multiplu. Dar 2011 este prim, deci $x=1$ sau $x=2011$. Cum $1492 = 3 \cdot 497 + 1$ este roşu, cazul $x=1$ exclus. Rămâne $x=2011$ ca singură posibilitate. Răspunsul dat la început satisface condiţiile, deci este singura colorare posibilă.

Problem of the week no. 87
Suppose all the integers have been colored with the three colors red, green and blue such that each integer has exactly one of those colors. Also suppose that the sum of any two green integers is blue, the sum of any two blue integers is green, the opposite of any green integer is blue, and the opposite of any blue integer is green. Finally, suppose that 1492 is red and that 2011 is green. Describe precisely which integers are red, which integers are green, and which integers are blue.
Solution:
The answer is: the green integers are those of the form $(3m+1)2011$, while the blue integers are those of the form $(3m+2)2011$ with m an arbitrary integer; other the other integers are red.

First note that 0 must be red, for if 0 were green (blue) then $0+0=0$ would be blue (green). Also, if n is red, then $-n$ is also red (for if $-n$ were green then $n=-(-n)$ would be blue, and conversely). So it is enough to determine which positive integers are red, green, and blue.

Let x be the smallest positive integer that is not red, and, for now, let's suppose it is green. Then $2x = x + x$ is blue, $4x = 2x + 2x$ is green, $5x = 4x + x$ is blue, $7x = 5x + 2x$ is green, $8x = 4x + 4x$ is blue. In fact, we can see by induction on k that for any integer $k \geq 0$, $(3k+1)x$ is green and $(3k+2)x$ is blue.
We claim that the remaining positive multiples of x: $3x$, $6x$, $9x$, … are red. For if $3kx$ is green, then $(3k+1)x = 3kx + x$, being the sum of two green integers, is blue, contradiction. Similarly if $3kx$ is blue. The only remaining possibility is that $3kx$ is red. We now claim that any positive integer that is not a multiple of x must be red. For suppose $y > 0$ is not a multiple of x, and consider the sequence x, $2x$, $4x$, $5x$, $7x$, $8x$, $10x$, $11x$, $13x$, $14x$, … which consists of alternating green and blue integers. If $y < x$ then y is red because x is the smallest non-red positive integer. Suppose y is between two integers of the sequence that differ by x: $(3k+1)x < y < (3k+2)x$. If y is blue, then because $-(3k+1)x$ is blue, $y-(3k+1)x$ is green. But the previous inequality implies that $0 < y-(3k+1)x < x$, contradicting that x is the smallest non-red positive integer. If y is green then $-y$ is blue, so $-y+(3k+2)x$ is green. But $0 < -y+(3k+2)x < x$, and again we have a contradiction. So y must be red. The remaining case is that y is between two integers of the sequence that differ by $2x$: $(3k+2)x < y < (3k+4)x$. In this case, if y is green, then $y-(3k+2)x$ is blue, and if y is blue, then $(3k+4)x - y$ is blue. Now $0 < y-(3k+2)x < 2x$ and $0 < (3k+4)x - y < 2x$, so in either case that y is not red, we have a blue integer between 0 and $2x$. However, by the first case there can be no such blue integer

between x and $2x$, and since x is the smallest positive non-red integer, there can be none between 0 and x. Also, neither $y-(3k+2)x$ nor $(3k+4)x-y$ can be x because y is not a multiple of x. This contradiction shows that y must be red. We now know that the only positive non-red integers are the multiples of x of the form $(3k+1)x$ and $(3k+2)x$. We are given that 2011 is green, so 2011 must be such a multiple. But 2011 is prime, so the only possibilities for x are $x=1$ and $x=2011$. We are also given that 1492 is red; note that $1492 = 3 \cdot 497 + 1$. Therefore, $x=1$ is impossible, leaving $x=2011$ as the only possibility. Thus, our initial answer is justified.