Problema săptămânii 86

O tablă $n \times n$ este împărţită în pătrăţele unitate. Dorim să alegem câteva din aceste pătrăţele unitate astfel încât să nu existe două linii şi nici două coloane cu acelaşi număr de pătrăţele alese. În câte moduri putem face această alegere?

Concursul Arany Dániel, Ungaria, 2017

Soluţie:

Numărul pătrăţelelor alese pe o linie sau pe o coloană poate fi 0, 1, 2, ... , n. Va trebui să alegem n valori distincte dintre acestea $n+1$ care să reprezinte numărul pătrăţelelor alese pe cele n linii. Făcând suma pătrăţelelor pe linii şi pe coloane deducem că cele n valori alese pe linii trebuie să coincidă cu cele n valori alese pe coloane. Dacă avem o linie cu 0 pătrăţele alese atunci nu putem avea coloană cu n pătrăţele alese, iar dacă avem o coloană cu 0 pătrăţele alese atunci nu putem avea linie cu n pătrăţele alese. Aşadar: fie pe cele n linii şi n coloane avem $1, 2, 3, \ldots, n$ pătrăţele, fie avem $0, 1, 2, \ldots n-1$ pătrăţele alese.
În primul caz, permutând liniile şi coloanele putem presupune că pe linia k avem k pătrătele alese şi pe coloana k avem k pătrăţele alese, pentru orice $k = \overline{1, n}$. Vom demonstra prin inducţie că această completare se poate face într-un unic mod.
Pentru $n = 1$ această afirmaţie este evidentă.
Presupunând-o adevărată pentru un $n \geq 1$ oarecare, să o demonstrăm pentru $n+1$. Evident, de pe ultima linie şi ultima coloană trebuie să alegem toate pătrăţelele. Acum, de pe fiecare din primele n linii şi n coloane am ales un pătrăţel, deci de pe linia k trebuie să mai alegem $k-1$ pătrăţele. Reordonăm liniile şi coloanele astfel încât de pe linia k să trebuiască să alegem $n-k$ pătrăţele. (Inversăm ordinea liniilor, apoi cea a coloanelor; ultima va veni prima, penultima va deveni a doua, etc.) Să observăm că a alege $n-k$ pătrăţele (din cele n ale liniei) este echivalent cu a nu alege k pătrăţele. Conform ipotezei de inducţie, putem face acest lucru într-un singur mod. Inducţia este astfel încheiată.
Prin urmare, deoarece liniile şi coloanele pot fi permutate în câte $n!$ moduri, sunt $(n!)^2$ moduri de a alege pătrăţele astfel ca pe linii (şi coloane) să avem $1, 2, \ldots, n$ pătrăţele alese.
Cu observaţia că „a alege k pătrăţele de pe o linie este echivalent cu a nu alege $n-k$ pătrăţele de pe acea linie” rezultă că avem tot $(n!)^2$ moduri de a alege pătrăţele astfel ca pe linii (şi coloane) să avem $0, 1, 2, \ldots, n-1$ pătrăţele alese.
În concluzie, sunt $2 \cdot (n!)^2$ moduri de a face alegerea.

Problem of the week no. 86

An $n \times n$ is divided into unit squares. In how many ways can one choose some of these unit squares such that the number of unit squares chosen from any two lines and from any two columns is different?

Arany Dániel Comptition, Hungary, 2017

Solution:

The number of squares to be chosen from one line can be 0, 1, 2, ... , n. We need

to choose n distinct values of these $n+1$ values to represent the number of squares to be chosen from the n lines. The sum of the n values chosen for the lines and the sum of the n values chosen for the columns have to be equal (with the total number of chosen squares), so the number missing from the list 0, 1, 2, ... , n should be the same for the lines as for the columns. Moreover, if from a line one choses 0 squares, then there can not be a column with n chosen squares, and similarly, an empty column can not coexist with a full line. Therefore, the number missing from the list 0, 1, 2, ... , n needs to be either 0 or n.
In the first case, rearranging the lines and columns, we may assume that we choose k squares from line k and k squares from column k for all $k = 1, 2, \ldots, n$. We prove by induction that we can achieve this in a unique way.
For $n = 1$ the statement is obvious.
Assuming it to be true for an arbitrary $n \geq 1$, let us prove it for $n + 1$. From the last line/column we need to choose all the squares. Next, we need to chose $k - 1$ squares from line k and column k, for all $k = 1, 2, \ldots, n$. We rearrange the lines and columns such that the last line becomes the first, etc. Then, from line k we need to chose $n - k$ squares, and similarly from column k. But choosing k squares out of n is equivalent to not choosing the other $n - k$. Looking to the „other" ones, those we are not going to chose, according to the inductive hypothesis, we can make this choice in a unique way. The induction is thus finished.
One can permute the lines in $n!$ ways and the columns in $n!$ ways, therefore there are $(n!)^2$ ways of choosing the squares such that on the different lines and columns we have $1, 2, \ldots, n$ chosen squares.
Using the remark made above „to chose k squares out of n is equivalent to not choosing the other $n - k$ squares from that line" it follows that we have $(n!)^2$ ways of choosing the squares such that on the different lines and columns we have $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ chosen squares.
In conclusion, there are $2 \cdot (n!)^2$ ways of choosing the squares.