Problema pentru clasa a VII-a.
Etapa: 07. Data: 03 ianuarie 2011.
Problema: 1.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ numere naturale distincte cu proprietatea că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 62\,.$$

Arătaţi că $720 | \, a_1 \cdot a_2 \cdot_{\ldots} \cdot a_{10}$.

* * *

Problema pentru clasa a VII-a.
Etapa: 07. Data: 03 ianuarie 2011.
Problema: 2.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, cu proprietatea că numerele $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ şi $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ sunt prime. Arătaţi atunci că numărul $a = 2^n \cdot r$ face parte dintr-o pereche de numere amiabile. (Două numere naturale distincte se numesc amiabile dacă fiecare dintre ele este egal cu suma divizorilor proprii ai celuilalt; prin divizor propriu al unui număr natural m înţelegem orice divizor natural al lui m care este mai mic decât m)

* * *

Problema pentru clasa a VII-a.
Etapa: 07. Data: 03 ianuarie 2011.
Problema: 3.

Arătaţi că dacă $a, b \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, atunci

$$0 \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \leq \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 .$$

* * *