Problema 1. Fie mulţimea $A = \{2^a 3^b 5^c \mid 0 \leq a, b, c \leq 2\}$. Determinaţi numărul minim k astfel încât dacă alegem oricare k numere din mulţimea A, vor exista două dintre ele, unul divizibil prin celălalt.

N. G. De Bruijn

Soluţia. (Dan Schwarz) Vom demonstra că valoarea este $k = 8$.

Alegerea $B = \{2^0 3^1 5^2, 2^0 3^2 5^1, 2^1 3^0 5^2, 2^1 3^1 5^1, 2^1 3^2 5^0, 2^2 3^0 5^1, 2^2 3^1 5^0\}$, cu alte cuvinte $B = \{2^a 3^b 5^c \mid 0 \leq a, b, c \leq 2,\ a + b + c = 3\}$, cu 7 elemente, este un exemplu fără două dintre ele, unul divizibil prin celălalt. Pe de altă parte, în acest caz simplu, este uşor de partiţionat mulţimea A în 7 clase disjuncte, astfel încât, în fiecare dintre clase, elementele dintr-o pereche să dividă unul pe celălalt.

O metodă utilă este scrierea elementelor pe nivele, după suma exponenţilor (diagrama Hasse a laticii de divizibilitate – se observă că elementele mulţimii B reprezintă linia din mijloc a diagramei)

$$\begin{array}{c}
2^2 3^2 5^2 \\
2^1 3^2 5^2 \ \ 2^2 3^1 5^2 \ \ 2^2 3^2 5^1 \\
2^0 3^2 5^2 \ \ 2^1 3^1 5^2 \ \ 2^1 3^2 5^1 \ \ 2^2 3^0 5^2 \ \ 2^2 3^1 5^1 \ \ 2^2 3^2 5^0 \\
2^0 3^1 5^2 \ \ 2^0 3^2 5^1 \ \ 2^1 3^0 5^2 \ \ 2^1 3^1 5^1 \ \ 2^1 3^2 5^0 \ \ 2^2 3^0 5^1 \ \ 2^2 3^1 5^0 \\
2^0 3^0 5^2 \ \ 2^0 3^1 5^1 \ \ 2^0 3^2 5^0 \ \ 2^1 3^0 5^1 \ \ 2^1 3^1 5^0 \ \ 2^2 3^0 5^0 \\
2^0 3^0 5^1 \ \ 2^0 3^1 5^0 \ \ 2^1 3^0 5^0 \\
2^0 3^0 5^0
\end{array}$$

Acum, orice alegere de 8 elemente din A va conţine o pereche în una din clasele partiţiei (din principiul cutiei), şi deci o pereche în care unul divide pe celălalt. ■

Remarcă. Rezultatul se extinde la o mulţime

$$A = \left\{ \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \mid 0 \leq a_i \leq m,\ i = 1, 2 \ldots, n \right\},$$

unde p_i sunt numere prime distincte. În aceste condiţii considerăm

$$B = \left\{ \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \mid 0 \leq a_i \leq m,\ i = 1, 2 \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = \lfloor nm/2 \rfloor \right\}.$$

Rezultatul lui De Bruijn, Tengbergen & Kruyswijk este că numărul căutat este $|B| + 1$, şi poate fi considerat o generalizare a lemei lui Sperner; pentru toţi $a_i \in \{0, 1\}$, avem $|B| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Problema 2. Un număr de n persoane şed în jurul unei mese, fiecare având un pahar conţinând o anume cantitate de apă. Cantitatea totală de apă din paharele celor n persoane este C. Anton, care stă în capul mesei, îşi distribuie în mod egal toată apa din paharul său celorlalte persoane. Apoi Barbara, vecinul din stânga lui Anton, procedează la fel, şi aşa mai departe, în ordine, până la Zaharia, vecinul din dreapta lui Anton, care şi el îşi distribuie în mod egal toată apa din paharul său celorlalte persoane. Se observă acum că fiecare are în paharul său exact cantitatea de apă pe care o avea la început.

Ce cantităţi de apă aveau persoanele din jurul mesei la început?

Internet

Soluţia. (Dan Schwarz) Fie x_i cantitatea iniţială de apă din paharul persoanei i, $1 \leq i \leq n$, deci $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = C$. Fie şi y_i cantitatea de apă din paharul persoanei i, $1 \leq i \leq n$, la momentul când îşi distribuie apa din paharul său. Atunci $y_i = x_i + \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} y_j$, şi, deoarece după distribuirea apei paharul persoanei a rămas gol, dar la sfârşit va conţine aceeaşi cantitate ca la început, $x_i = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} y_j$. Dar atunci $y_i = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} y_j + \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} y_j$, adică $\dfrac{n}{n-1} y_i = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j$, deci toate cantităţile y_i sunt egale, să zicem $y_i = y$, pentru $1 \leq i \leq n$.

Rezultă $x_i = \dfrac{n-i}{n-1} y$, deci $C = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{n-i}{n-1} y = \dfrac{n}{2} y$, de unde $y = \dfrac{2C}{n}$. Prin urmare $x_i = \dfrac{2C(n-i)}{n(n-1)}$, for $1 \leq i \leq n$.

Să mai observăm că de fapt cantităţile de apă din pahare iau tot timpul aceleaşi valori, $\dfrac{2C(n-1)}{n(n-1)}, \dfrac{2C(n-2)}{n(n-1)}, \ldots, \dfrac{2C}{n(n-1)}, 0$, doar că aceste valori sunt rotite în jurul mesei, prin aplicarea permutării ciclice $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$, astfel încât, după cei n paşi, se revine la situaţia iniţială. ■

Problema 3. Pentru orice întreg $n \geq 2$, arătaţi că există n numere întregi pozitive distincte, astfel încât produsul lor să fie divizibil prin suma oricăror două dintre ele.

***

Soluţia. (Dan Schwarz) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oricare numere întregi strict pozitive distincte, şi fie $d = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j)$. Să luăm acum $a_k = dx_k$ pentru toţi $1 \leq k \leq n$. Dar atunci $a_i + a_j \mid \prod_{1 \leq k \leq n} a_k$ pentru $i \neq j$, deoarece $a_i + a_j = d(x_i + x_j)$, $\prod_{1 \leq k \leq n} a_k = d^n \prod_{1 \leq k \leq n} x_k$, şi $x_i + x_j \mid d$, deci $a_i + a_j \mid d^2$.

Evident, problema poate fi generalizată pentru a avea produsul numerelor divizibil la suma oricăror şi oricâtor elemente ale mulţimii. ■