

**Problema 1.** Fie mulțimea  $A = \{2^a 3^b 5^c \mid 0 \leq a, b, c \leq 2\}$ . Determinați numărul minim  $k$  astfel încât dacă alegem oricare  $k$  numere din mulțimea  $A$ , vor exista două dintre ele, unul divizibil prin celălalt.

N. G. De Bruijn

**Soluția.** (Dan Schwarz) Vom demonstra că valoarea este  $k = 8$ .

Alegerea  $B = \{2^0 3^1 5^2, 2^0 3^2 5^1, 2^1 3^0 5^2, 2^1 3^1 5^1, 2^1 3^2 5^0, 2^2 3^0 5^1, 2^2 3^1 5^0\}$ , cu alte cuvinte  $B = \{2^a 3^b 5^c \mid 0 \leq a, b, c \leq 2, a + b + c = 3\}$ , cu 7 elemente, este un exemplu fără două dintre ele, unul divizibil prin celălalt. Pe de altă parte, în acest caz simplu, este ușor de partiționat mulțimea  $A$  în 7 clase disjuncte, astfel încât, în fiecare dintre clase, elementele dintr-o pereche să dividă unul pe celălalt.

O metodă utilă este scrierea elementelor pe nivele, după suma exponentilor (diagrama Hasse a laticii de divizibilitate – se observă că elementele mulțimii  $B$  reprezintă linia din mijloc a diagramei)

$$\begin{array}{c}
 2^2 3^2 5^2 \\
 2^1 3^2 5^2 \quad 2^2 3^1 5^2 \quad 2^2 3^2 5^1 \\
 2^0 3^2 5^2 \quad 2^1 3^1 5^2 \quad 2^1 3^2 5^1 \quad 2^2 3^0 5^2 \quad 2^2 3^1 5^1 \quad 2^2 3^2 5^0 \\
 2^0 3^1 5^2 \quad 2^0 3^2 5^1 \quad 2^1 3^0 5^2 \quad 2^1 3^1 5^1 \quad 2^1 3^2 5^0 \quad 2^2 3^0 5^1 \quad 2^2 3^1 5^0 \\
 2^0 3^0 5^2 \quad 2^0 3^1 5^1 \quad 2^0 3^2 5^0 \quad 2^1 3^0 5^1 \quad 2^1 3^1 5^0 \quad 2^2 3^0 5^0 \\
 2^0 3^0 5^1 \quad 2^0 3^1 5^0 \quad 2^1 3^0 5^0 \\
 2^0 3^0 5^0
 \end{array}$$

Acum, orice alegere de 8 elemente din  $A$  va conține o pereche în una din clasele partiției (din principiul cutiei), și deci o pereche în care unul divide pe celălalt. ■

**Remarcă.** Rezultatul se extinde la o mulțime

$$A = \left\{ \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} \mid 0 \leq a_i \leq m, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

unde  $p_i$  sunt numere prime distincte. În aceste condiții considerăm

$$B = \left\{ \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} \mid 0 \leq a_i \leq m, i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^n a_i = \lfloor nm/2 \rfloor \right\}.$$

Rezultatul lui De Bruijn, Tengbergen & Kruijswijk este că numărul căutat este  $|B| + 1$ , și poate fi considerat o generalizare a lemei lui Sperner; pentru toți  $a_i \in \{0, 1\}$ , avem  $|B| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

**Problema 2.** Un număr de  $n$  persoane șed în jurul unei mese, fiecare având un pahar conținând o anumite cantitate de apă. Cantitatea totală de apă din paharele celor  $n$  persoane este  $C$ . Anton, care stă în capul mesei, își distribuie în mod egal toată apa din paharul său celorlalte persoane. Apoi Barbara, vecinul din stânga lui Anton, procedează la fel, și așa mai departe, în ordine, până la Zaharia, vecinul din dreapta lui Anton, care și el își distribuie în mod egal toată apa din paharul său celorlalte persoane. Se observă acum că fiecare are în paharul său exact cantitatea de apă pe care o avea la început.

Ce cantități de apă aveau persoanele din jurul mesei la început?

Internet

**Soluția.** (Dan Schwarz) Fie  $x_i$  cantitatea inițială de apă din paharul persoanei  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , deci  $\sum_{i=1}^n x_i = C$ . Fie și  $y_i$  cantitatea de apă din paharul persoanei  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , la momentul când își distribuie apa din paharul său. Atunci  $y_i = x_i + \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} y_j$ , și, deoarece după distribuirea apei paharul persoanei a rămas gol, dar la sfârșit va conține aceeași cantitate ca la început,  $x_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_j$ . Dar atunci  $y_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} y_j + \frac{1}{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_j$ , adică  $\frac{n}{n-1} y_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n y_j$ , deci toate cantitățile  $y_i$  sunt egale, să zicem  $y_i = y$ , pentru  $1 \leq i \leq n$ .

Rezultă  $x_i = \frac{n-i}{n-1} y$ , deci  $C = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n-1} y = \frac{n}{2} y$ , de unde  $y = \frac{2C}{n}$ . Prin urmare  $x_i = \frac{2C(n-i)}{n(n-1)}$ , for  $1 \leq i \leq n$ .

Să mai observăm că de fapt cantitățile de apă din pahare iau tot timpul aceleași valori,  $\frac{2C(n-1)}{n(n-1)}, \frac{2C(n-2)}{n(n-1)}, \dots, \frac{2C}{n(n-1)}, 0$ , doar că aceste valori sunt rotite în jurul mesei, prin aplicarea permutării ciclice  $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ , astfel încât, după cei  $n$  pași, se revine la situația inițială. ■

**Problema 3.** Pentru orice întreg  $n \geq 2$ , arătați că există  $n$  numere întregi pozitive distincte, astfel încât produsul lor să fie divizibil prin suma oricăror două dintre ele.

\*\*\*

**Soluția.** (Dan Schwarz) Fie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oricare numere întregi strict pozitive distincte, și fie  $d = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j)$ . Să luăm acum  $a_k = dx_k$  pentru

toți  $1 \leq k \leq n$ . Dar atunci  $a_i + a_j \mid \prod_{1 \leq k \leq n} a_k$  pentru  $i \neq j$ , deoarece

$a_i + a_j = d(x_i + x_j)$ ,  $\prod_{1 \leq k \leq n} a_k = d^n \prod_{1 \leq k \leq n} x_k$ , și  $x_i + x_j \mid d$ , deci  $a_i + a_j \mid d^2$ .

Evident, problema poate fi generalizată pentru a avea produsul numerelor divizibil la suma oricăror și oricâtor elemente ale mulțimii. ■