Problema 1. Dacă mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este inclusă în reuniunea a n progresii aritmetice, demonstraţi că suma inverselor raţiilor acestor progresii aritmetice este mai mare sau egală cu 1.

Formal, dacă

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{n} \{a_k + mb_k \mid m \in \mathbb{N}\},$$

unde $a_k \in \mathbb{N}$, $b_k \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $1 \leq k \leq n$, atunci $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \geq 1$.

Paul Erdös

Soluţia. (Dan Schwarz) Fie N întreg pozitiv arbitrar. Atunci numerele din $\{0, 1, \ldots, N\}$ conţinute în progresia aritmetică $\{a_k + mb_k \mid m \in \mathbb{N}\}$ sunt cel mult $\lceil N/b_k \rceil + 1$. Rezultă că

$$N + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} (\lceil N/b_k \rceil + 1) \leq \sum_{k=1}^{n} (N/b_k + 1) = N \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} + n,$$

deci $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \geq 1 - \frac{n-1}{N}$ pentru orice $N \geq 1$, prin urmare $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \geq 1$. ■

Remarcă. Se poate demonstra că dacă progresiile aritmetice au raţiile distincte atunci inegalitatea este strictă. Mai mult, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = 1$ este o condiţie necesară pentru a avea situaţia din enunţ pentru n progresii aritmetice disjuncte, şi atunci raţiile lor sunt mutual ne-coprime; mai mult, măcar două dintre ele trebuie să fie egale.

Problema 2. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o permutare oarecare a numerelor $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$. Demonstraţi că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}.$$

Iugoslavia, IMO1990 LongList

Soluţia. (Dan Schwarz) Forma inegalităţii conduce imediat la considerarea inegalităţii rearanjamentelor. Fie $a_n = k$, $a_1 = \ell$; atunci

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{k-1}{b_{k-1}} + \frac{k+1}{b_{k+1}} + \cdots + \frac{n}{b_n},$$

unde elementele b_i sunt numerele $1, 2, \ldots, n$, mai puţin ℓ.

Dacă $\ell \geq k+1$, atunci conform cu inegalitatea rearanjamentelor membrul drept este mai mare sau egal cu

$$\frac{1}{1} + \cdots + \frac{k-1}{k-1} + \left(\frac{k+1}{k} + \cdots + \frac{\ell}{\ell-1}\right) + \frac{\ell+1}{\ell+1} + \cdots + \frac{n}{n},$$

unde termenii din afara parantezelor sunt egali cu 1, iar cei dintre paranteze sunt supraunitari, deci valoarea expresiei este evident mai mare decât ceea ce se cere.

Dacă $\ell \leq k-1$, atunci conform cu inegalitatea rearanjamentelor membrul drept este mai mare sau egal cu

$$\frac{1}{1} + \cdots + \frac{\ell-1}{\ell-1} + \left(\frac{\ell}{\ell+1} + \cdots + \frac{k-1}{k}\right) + \frac{k+1}{k+1} + \cdots + \frac{n}{n},$$

unde termenii din afara parantezelor sunt egali cu 1, iar cei dintre paranteze sunt exact cei din expresia care trebuie obţinută, deci valoarea expresiei este evident mai mare decât ceea ce se cere, mai puţin cazul $k = n$, $\ell = 1$, când se obţine exact inegalitatea dorită. ■

Problema 3. Determinaţi pentru care valori $n \geq 3$ poligonul regulat cu n laturi poate fi triangulat (prin diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului) în triunghiuri care sunt toate isoscele.

Dan Schwarz

Soluţie Susţinem că răspunsul este $\boxed{n = 2^a(2^b + 1)}$, sau, echivalent, $\boxed{n = 2^a + 2^b}$.

Soluţia de mai jos se bazează pe faptul că laturile poligonului sunt şi laturi într-un triunghi al triangulării. Or un astfel de triunghi este isoscel doar dacă această latură este bază, cu vârful pe mediatoarea sa, sau dacă această latură face parte din triunghi împreună cu una din cele două laturi adiacente în poligon.

Dacă n este par, al doilea caz este singurul posibil, căci mediatoarea unei laturi nu conţine un vârf al poligonului. Prin urmare se formează o *brăţară* de triunghiuri formate din câte două laturi adiacente, creând un poligon regulat cu $n/2$ laturi interior celui iniţial.

Dacă n este impar, o astfel de brăţară este imposibilă, deci măcar o latură apare într-un triunghi isoscel ca bază. Dar acest lucru nu se mai poate atunci întâmpla pentru nicio alta (căci cele două triunghiuri s-ar intersecta), deci poligonul este partiţionat în acest triunghi şi două poligoane simetrice. Faptul esenţial următor este că

Soluţie Alternativă. Această soluţie se bazează pe faptul că centrul cercului circumscris poligonului se află sau pe una din laturile unui triunghi din triangulare, sau în interiorul său.

În primul caz, acea latură este un diametru al cercului; conform cu argumentul din prima soluţie, de o parte şi alta a sa se vor afla triunghiuri isoscele cu diametrul ca bază, apoi alte triunghiuri isoscele cu bazele laturile egale ale triunghiurilor de mai înainte, şi aşa mai departe, până când poligonul este triangulat în $2 + 4 + \cdots + 2^k$ triunghiuri isoscele, având atunci 2^{k+1} vârfuri.

În al doilea caz, triunghiul isoscel careconţine centrul cercului va determina trei sub-poligoane (două fiind simetrice), Fiecare dintre ele nu poate fi triangulat decât prin acest procedeu de triunghiuri isoscele având drept baze laturile celor de mai înainte, conducând la ... ■