Problema săptămânii 84
Fie $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ două cercuri tangente într-un punct T astfel încât cercul $\mathscr{C}_1$ se află în interiorul cercului $\mathscr{C}_2$. Fie M şi N două puncte pe $\mathscr{C}_1$ diferite de T. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde ale cercului $\mathscr{C}_2$ care trec prin M, respectiv N. Dacă dreptele BD, AC şi MN au un punct comun K, arătaţi că $(TK$ este bisectoarea unghiului MTN.

baraj Franţa, 2017

Soluţia oficială (în limba franceză)
Soluţie: (*Andrei Mărginean*)
Fie $\{E\} = AB \cap CD$, $\{X\} = TM \cap \mathscr{C}_2$ şi $\{Y\} = TN \cap \mathscr{C}_2$. Cum $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ sunt tangente în T, dacă notăm cu O_1 şi O_2 centrele cercurilor $\mathscr{C}_1$, respectiv $\mathscr{C}_2$, punctele T, O_1 şi O_2 sunt coliniare, deci $m(\sphericalangle O_1TM) = m(\sphericalangle O_2TX)$. De aici rezultă că $\sphericalangle TO_1M \equiv \sphericalangle TO_2X$, deci $\sphericalangle TNM \equiv \sphericalangle TYX$, ceea ce arată că $MN \parallel XY$. (Omotetia de centru T care duce cercul $\mathscr{C}_1$ în cercul $\mathscr{C}_2$, duce segmentul $[MN]$ în segmentul (paralel) $[XY]$.)
Din teorema lui Thales rezultă că $\dfrac{TM}{MX} = \dfrac{TN}{NY}$, deci $\dfrac{TM}{TN} = \dfrac{MX}{NY}$. Din puterea punctului M faţă de cercul $\mathscr{C}_2$ avem $AM \cdot MB = TM \cdot MX$, iar din puterea lui N rezultă că $CN \cdot ND = TN \cdot NY$.
Deducem că $\left(\dfrac{TM}{TN}\right)^2 = \dfrac{TM \cdot MX}{TN \cdot NY} = \dfrac{AM \cdot MB}{CN \cdot ND}$.
Din teorema lui Menelaus în triunghiul EMN tăiat de transversalele $D-K-B$ şi $A-K-C$ obţinem $\dfrac{ED}{DN} \cdot \dfrac{KN}{KM} \dfrac{MB}{BE} = 1$ şi $\dfrac{EA}{AM} \cdot \dfrac{KM}{KN} \dfrac{NC}{CE} = 1$. Obţinem din cele două relaţii că $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{ED \cdot MB}{DN \cdot BE}$ şi $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{AM \cdot CE}{EA \cdot NC}$. Înmulţindu-le obţinem că $\left(\dfrac{KM}{KN}\right)^2 = \dfrac{ED \cdot MB}{DN \cdot BE} \cdot \dfrac{AM \cdot CE}{EA \cdot NC} = \dfrac{AM \cdot BM}{CN \cdot DN} \cdot \dfrac{CE \cdot DE}{AE \cdot BE}$. Din puterea punctului E faţă de cercul $\mathscr{C}_2$ rezultă $CE \cdot DE = AE \cdot BE$, deci $\left(\dfrac{KM}{KN}\right)^2 = \dfrac{AM \cdot BM}{CN \cdot DN} = \left(\dfrac{TM}{TN}\right)^2$, adică $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{TM}{TN}$. Din reciproca teoremei bisectoarei rezultă concluzia.

Remarcă: (*Vlad Vergelea*) Afirmaţia din problemă rămâne valabilă şi dacă cercurile sunt tangente exterior.

Problem of the week no. 84
Let $\mathscr{C}_1$ and $\mathscr{C}_2$ be two circles tangent at T such that $\mathscr{C}_1$ lies in the interior of $\mathscr{C}_2$. Let M and N be two points on $\mathscr{C}_1$, others than T. Let $[AB]$ and $[CD]$ be two chords of $\mathscr{C}_2$ passing through M, and N, respectively. If the lines BD, AC and MN have a common point K, prove that $(TK$ is the angle bisector of angle MTN.

TST France, 2017

Solution: (*Andrei Mărginean*)
Let $\{E\} = AB \cap CD$, $\{X\} = TM \cap \mathscr{C}_2$ and $\{Y\} = TN \cap \mathscr{C}_2$. As $\mathscr{C}_1$ and $\mathscr{C}_2$

are tangent at T, if O_1 and O_2 are the centers of circles $\mathscr{C}_1$, and $\mathscr{C}_2$ respectively, points T, O_1 and O_2 are collinear, hence $\sphericalangle O_1TM = \sphericalangle O_2TX$. It follows that $\sphericalangle TO_1M = \sphericalangle TO_2X$, hence $\sphericalangle TNM = \sphericalangle TYX$, which shows that $MN \parallel XY$.

From Thales's Theorem we obtain $\dfrac{TM}{MX} = \dfrac{TN}{NY}$, i.e. $\dfrac{TM}{TN} = \dfrac{MX}{NY}$. From the power of M w.r.t. $\mathscr{C}_2$ we have $AM \cdot MB = TM \cdot MX$, and from the power of N it follows that $CN \cdot ND = TN \cdot NY$.

Hence $\left(\dfrac{TM}{TN}\right)^2 = \dfrac{TM \cdot MX}{TN \cdot NY} = \dfrac{AM \cdot MB}{CN \cdot ND}$.

From Menelaus's Theorem in triangle EMN cut by the transversal lines $D-K-B$ and $A-K-C$ we obtain $\dfrac{ED}{DN} \cdot \dfrac{KN}{KM}\dfrac{MB}{BE} = 1$ and $\dfrac{EA}{AM} \cdot \dfrac{KM}{KN}\dfrac{NC}{CE} = 1$. Then $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{ED \cdot MB}{DN \cdot BE}$ and $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{AM \cdot CE}{EA \cdot NC}$. Multiplying these two together leads to $\left(\dfrac{KM}{KN}\right)^2 = \dfrac{ED \cdot MB}{DN \cdot BE} \cdot \dfrac{AM \cdot CE}{EA \cdot NC} = \dfrac{AM \cdot BM}{CN \cdot DN} \cdot \dfrac{CE \cdot DE}{AE \cdot BE}$. from the power of point E w.r.t. $\mathscr{C}_2$ it follows that $CE \cdot DE = AE \cdot BE$, hence $\left(\dfrac{KM}{KN}\right)^2 = \dfrac{AM \cdot BM}{CN \cdot DN} = \left(\dfrac{TM}{TN}\right)^2$, i.e. $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{TM}{TN}$. This is equivalent to the conclusion.

Remark: (*Vlad Vergelea*) The statement of the problem is valid also in the case of externally tangent circles.