Problema săptămânii 83
Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ poate fi partiţionată în n perechi $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, ... , $\{a_n, b_n\}$ astfel încât suma numerelor din fiecare pereche să fie număr prim.

Aceasta este „**teorema Greenfield şi Greenfield**", publicată prima oară în Greenfield, L. and Greenfield, S., Some problems of combinatorial number theory related to Bertrand's postulate, J. Integer Seq. 1 (1998), Articolul 98.1.2.

Demonstraţie: (a teoremei Greenfield & Greenfield)
Vom face demonstraţia prin inducţie „tare" după n.
Pentru $n = 1$ nu avem ce demonstra: $1 + 2$ este prim.
Să presupunem afirmaţia adevărată pentru $1, 2, \ldots, n$ şi să o demonstrăm pentru $n + 1$. Conform teoremei Bertrand-Cebîşev,[1]

pentru orice număr natural $m > 3$, există cel puţin un număr prim printre numerele $m + 1$, $m + 2$, ... , $2m - 3$.

Avem nevoie de o formă mai slabă (şi mai uşor de reţinut): pentru orice număr natural $m > 1$, există cel puţin un număr prim p astfel încât $m < p < 2m$.
Astfel, putem alege un număr prim p astfel încât $2n + 2 < p < 4n + 4$. Formăm perechi cu suma p: împerechem $2n+2$ cu $p-(2n+2)$, $2n+1$ cu $p-(2n+1)$, etc, până la $\frac{p+1}{2}$ cu $\frac{p-1}{2}$. Am folosit numerele de la $p - (2n + 2)$ până la $2n + 2$. Cum $4n + 3 \geq p \geq 2n + 3$, i-am folosit cel puţin pe $2n + 1$ şi $2n + 2$ şi cel mult toate numerele de la 1 la $2n + 2$. Cel mai mic număr folosit este impar, iar pentru cele rămase (dacă există), $1, 2, \ldots, p-2n-3$, putem aplica ipoteza de inducţie potrivit căreia numerele rămase pot fi grupate în perechi având suma număr prim.

Problem of the week no. 83
Prove that, for all $n \in \mathbb{N}$, the set $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ can be partitioned into n pairs $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, ... , $\{a_n, b_n\}$ such that $a_k + b_k$ is a prime for all $1 \leq k \leq n$.

This is the „**Greenfield and Greenfield Theorem**", first published in Greenfield, L. and Greenfield, S., Some problems of combinatorial number theory related to Bertrand's postulate, J. Integer Seq. 1 (1998), Article 98.1.2.

Proof: (Greenfield and Greenfield Theorem)
We proceed by induction.
For $n = 1$ there is nothing to prove since $1 + 2$ is prime.
Suppose the statement to be true for $1, 2, \ldots, n$ and let us prove it for $n + 1$. According to the Bertrand-Chebyshef Theorem[2], for any positive integer $m > 3$,

[1] Conjecturată în 1845 de către Joseph Bertrand, care a şi verificat-o pentru $m \leq 3000000$, această afirmaţie a fost demonstrată în 1852 de către Pafnuti Cebîşev.
[2] Conjectured in 1845 by Joseph Bertrand, who also checked it for $m \leq 3000000$, the statement was proven in 1852 by Pafnuti Chebyshev.

there is at least one prime number among the numbers $m+1$, $m+2$, ... , $2m-3$. We only need a weaker version: for any positive integer $m > 1$, there is at least one prime number among the numbers $m+1$, $m+2$, ... , $2m-1$.
Hence, we can chose a prime p such that $2n+2 < p < 4n+4$. We form pairs that have the sum p: we pair up $2n+2$ with $p-(2n+2)$, $2n+1$ with $p-(2n+1)$, etc, we pair $\frac{p+1}{2}$ with $\frac{p-1}{2}$. We have used the numbers from $p-(2n+2)$ until $2n+2$. As $4n+3 \geq p \geq 2n+3$, we have used at least $2n+1$ and $2n+2$, and at most all the numbers. The smallest number used is odd, and for the remaining ones (if any), $1, 2, \ldots, p-2n-3$, we may apply the inductive hypothesis, according to which, the remaining numbers can also be grouped into pairs whose sum is a prime.