Problema săptămânii 82
Fie n un număr natural nenul. Numerele 1, 2, 3, $\ldots$, $2n$ sunt scrise într-o ordine oarecare în $2n$ puncte ale unui cerc. Fiecărei coarde care uneşte două asemenea puncte i se asociază modulul diferenţei numerelor înscrise în capetele sale. Arătaţi că se pot alege n coarde care nu se intersectează nicicare două astfel încât suma valorilor asociate acestor coarde să fie n^2.

Olimpiadă Filipine, 2013

Soluţie:
Demonstrăm că numerele *mici*, adică $1, 2, \ldots, n$, pot fi împerecheate prin coarde care nu se intersectează cu numerele *mari*, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n$.
Undeva pe cerc găsim un număr *mare* lângă unul *mic*. Le unim, după care ignorăm aceste puncte. Printre numerele rămase sunt $n-1$ numere *mari* şi $n-1$ numere *mici*. Din nou, vor exista printre ele două vecine, unul *mare*, celălalt *mic*. Le unim cu o coardă. Continuăm până când epuizăm numerele. (Coardele trasate anterior nu vor intersecta niciuna dintre cele trasate ulterior.) Deoarece fiecare coardă uneşte un număr *mare* cu unul *mic* suma numerelor asociate celor n coarde va fi suma numerelor *mari* minus suma numerelor *mici*, adică $[(n+1)+(n+2)+\ldots+2n]-(1+2+\ldots+n)=n^2$.

Problem of the week no. 82
Let n be a positive integer. The numbers $1, 2, 3, \ldots, 2n$ are randomly assigned to $2n$ distinct points on a circle. To each chord joining two of these points, a value is assigned equal to the absolute value of the difference between the assigned numbers at its endpoints. Show that one can choose n pairwise non-intersecting chords such that the sum of the values assigned to them is n^2.

The Philippines MO, 2013

Solution:
We prove that the *small numbers*, i.e. $1, 2, \ldots, n$, can joined by non-intersecting chords with the *large numbers*, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n$.
Some place on the circle we can find a *large number* next to a *small* one. We join them, then we ignore these two points. On the remaining points, there are $n-1$ *large numbers* and $n-1$ *small ones.* Again, there must be two neighboring points containing one of them a *large number*, the other a *small* one. Join them by a chord. We repeat this procedure until there are no remaining points. (The chords drawn earlier on will not intersect any of the chords drawn later on.) As each chord link a *large number* to a *small* one, the sum of the numbers associated to the n chords will be the difference between the sum of the *large numbers* and the sum of the *small numbers*, i.e. $[(n+1)+(n+2)+\ldots+2n]-(1+2+\ldots+n)=n^2$.