Problema săptămânii 81

Dacă a, b, c > 0, demonstrați că

$$\frac{a}{b(a^2+2b^2)}+\frac{b}{c(b^2+2c^2)}+\frac{c}{a(c^2+2a^2)}\geqslant\frac{3}{ab+bc+ca}.$$

<u>Soluție</u>: Cu inegalitatea Cauchy-Schwarz (forma Engel sau Titu) avem

$$\sum\frac{a}{b(a^2+2b^2)}=\sum\frac{a^4c^4}{a^3bc^4(a^2+2b^2)}\geqslant\frac{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2}{\sum a^5bc^4+2\sum a^3b^3c^4}.$$

Rezultă că este suficient să arătăm că

$$\frac{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2}{\sum a^5bc^4+2\sum a^3b^3c^4}\geqslant\frac{3}{ab+bc+ca}$$

$$\sum a^5b^5+\sum ab^5c^4+2\sum a^5b^3c^2+2\sum a^5b^2c^3\geqslant 2\sum a^5bc^4+4\sum a^4b^3c^3 \qquad (1)$$

Inegalitatea (1) se obține prin adunarea inegalităților

$$\sum a^5b^3c^2+\sum a^5b^2c^3\geqslant 2\sum a^4b^3c^3 \qquad (Muirhead)$$

$$\sum a^5b^5+\sum a^3b^5c^2\geqslant 2\sum a^4b^5c, \quad \sum ab^5c^4+\sum a^5b^3c^2\geqslant 2\sum a^3b^4c^3 \quad (AM-GM)$$