Problema săptămânii 81
Dacă $a, b, c > 0$, demonstraţi că

$$\frac{a}{b(a^2+2b^2)} + \frac{b}{c(b^2+2c^2)} + \frac{c}{a(c^2+2a^2)} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Mathematical Excalibur, vol. 20, nr. 1/2015, problema 470

Soluţie: (*Vlad Vergelea*)
Eliminând numitorii se ajunge după calcule la inegalitatea
$24a^3b^3c^3 + 2\sum a^5b^3c + 8\sum a^5bc^3 \leq \sum a^2b^3c^4 + 3\sum a^4b^3c^2 + 2\sum a^6b^2c + 4\sum a^4b^4c + 2\sum a^5b^2c^2 + 2\sum a^6b^3 + 4\sum a^5b^4$ în care toate sumele sunt ciclice.

- Dar $a^5b^2c^2 + a^5c^4 \geq 2a^5bc^3$, deci $\sum a^5b^2c^2 + \sum a^5c^4 \geq 2\sum a^5bc^3$.
- În plus, $\sum a^2b^3c^4 + 3\sum a^4b^3c^2 + 4\sum a^4b^4c \geq 24a^3b^3c^3$.
- Rămâne de demonstrat că $\sum a^6b^2c + \sum a^6b^3 + \sum a^5b^4 \geq \sum a^5b^3c + 2\sum a^5bc^3$.

Vom demonstra mai întâi printr-o spargere cu medii că $\sum a^6b^3 \geq \sum a^5b^3c$.
Căutăm ponderile $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}_+$, cu $\alpha + \beta + \gamma = 1$, astfel încât $\alpha \cdot a^6b^3 + \beta \cdot b^6c^3 + \gamma \cdot c^6a^3 \geq a^5b^3c$ să reprezinte inegalitatea ponderată a mediilor. Avem $\alpha \cdot a^6b^3 + \beta \cdot b^6c^3 + \gamma \cdot c^6a^3 \geq a^{6\alpha+3\gamma}b^{6\beta+3\alpha}c^{6\gamma+3\beta}$, deci vrem ca $\begin{cases} 6\alpha + 3\gamma = 5 \\ 6\beta + 3\alpha = 3 \\ 6\gamma + 3\beta = 1 \end{cases}$

Rezolvând sistemul, obţinem $\alpha = \dfrac{7}{9}$, $\beta = \gamma = \dfrac{1}{9}$. Numerele fiind nenegative, inegalitatea se verifică.

- Rămâne să demonstrăm că $\sum a^6b^2c + \sum a^5b^4 \geq 2\sum a^5bc^3$. Vom demonstra, tot cu spargeri cu medii, că $\sum a^6b^2c \geq \sum a^5b^2c^2$. Cum $\sum(a^5b^2c^2 + a^5c^4) \geq 2\sum a^5bc^3$, va rezulta concluzia.

La fel ca mai sus se găsesc ponderile (raţionale, pozitive, cu suma 1) $\alpha = \dfrac{16}{21}$, $\beta = \dfrac{1}{21}$, $\gamma = \dfrac{4}{21}$ pentru care inegalitatea $\alpha \cdot a^6b^2c + \beta \cdot b^6c^2a + \gamma \cdot c^6a^2b \geq a^5b^2c^2$ reprezintă inegalitatea mediilor ponderată. Scriind şi analoagele şi adunând obţinem $\sum a^6b^2c \geq \sum a^5b^2c^2$.

O altă soluţie poate fi găsită în Mathematical Excalibur.

Problem of the week no. 81
If $a, b, c > 0$, then prove that

$$\frac{a}{b(a^2+2b^2)} + \frac{b}{c(b^2+2c^2)} + \frac{c}{a(c^2+2a^2)} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Mathematical Excalibur, vol. 20, no. 1/2015, problem 470

Se also the proof from Mathematical Excalibur.