Problema săptămânii 80

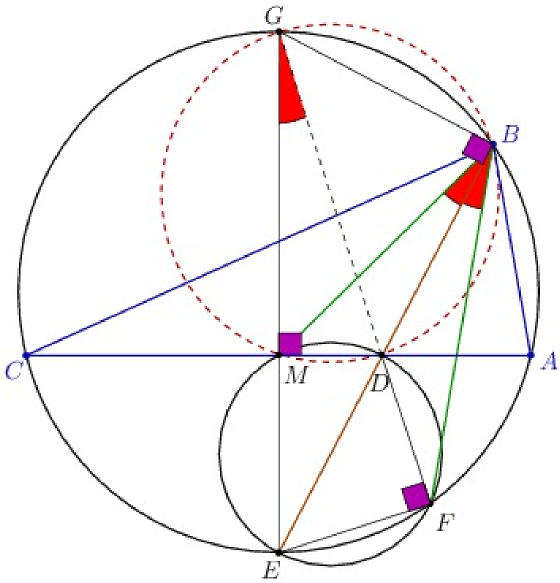
În triunghiul ABC, cu $AB \neq BC$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ intersectează latura $[AC]$ în punctul D şi cercul circumscris în punctul E. Cercul de diametru $[DE]$ intersectează a doua oară cercul circumscris în punctul F. Demonstraţi că BF este simediana din B a triunghiului ABC.

Revista KöMaL, problema B. 4893, sept. 2017

Soluţia 1:

Să presupunem că $AB < BC$, celălalt caz fiind analog.

Fie M mijlocul laturii $[BC]$. Se ştie că ME este mediatoarea laturii $[BC]$, deci M este pe cercul de diametru $[DE]$. Să notăm cu G punctul în care dreapta ME intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC. Cum $[EG]$ este diametru în acest cerc, rezultă că $m(\sphericalangle EFG) = 90°$. Dar F este pe cercul de diametru $[DE]$, deci $m(\sphericalangle EFD) = 90° = m(\sphericalangle EFG)$, prin urmare punctele F, D, G sunt coliniare. Patrulaterele $BGEF$ şi $GMDB$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle EBF \equiv \sphericalangle EGF \equiv \sphericalangle MGD \equiv \sphericalangle MBD$, deci BF este simetricul medianei BM faţă de bisectoarea BE, adică este simediana din B.



Comentariu: O descriere simplă a simedianei prin precizarea punctului în care ea intersectează cercul circumscris.

Soluţia 2: (*Titu Zvonaru*)

Notăm cu E' punctul diametral opus punctului E şi cu N intersecţia dintre BF şi latura AC. Deoarece $\sphericalangle DFE = 90°$ şi $\sphericalangle E'FE = 90°$, rezultă că punctele F, D, E' sunt coliniare.

Deducem că $(FD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CFA$, adică $\dfrac{CF}{FA} = \dfrac{DC}{DA} = \dfrac{a}{c}$.

Folosind raportul ariilor triunghiurilor CFN şi AFN, obţinem

$$\frac{CN}{NA} = \frac{\mathscr{A}_{CFN}}{\mathscr{A}_{AFN}} = \frac{CF \cdot FN \sin(\sphericalangle CFN)}{AF \cdot FN \sin(\sphericalangle AFN)} = \frac{CF}{AF} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a^2}{c^2},$$

deci BF este simediana din B.

Problem of the week no. 80

In a triangle ABC, with $AB \neq BC$, the angle bisector drawn from point B intersects side AC at point D, and intersects the circumcircle again at point E. The circle of diameter DE intersects the circumcircle again at a point F, different from E. Prove that the reflection of line BF about the line BD results in a median of triangle ABC.

KöMaL, problem B. 4893, sept. 2017

Solution:

Without loss of generality, we may assume that $AB < BC$.

Let M be the midpoint of side BC. It is well known that ME is the perpendicular bisector of the side BC, hence M lies on the circle of diameter DE. Let G be the point in which the line ME meets again the circumcircle of triangle ABC. As EG is a diameter of this circle, it follows that $\sphericalangle EFG = 90°$. But F is also on the circle of diameter DE, therefore $\sphericalangle EFD = 90° = \sphericalangle EFG$, which means that the points F, D, G are collinear. The quadrilaterals $BGEF$ and $GMDB$ are cyclic, hence $\sphericalangle EBF = \sphericalangle EGF = \sphericalangle MGD = \sphericalangle MBD$, which means that BF is the reflection of the median BM into the angle bisector BE.