Problema săptămânii 79
Repetatul unui număr natural nenul se obţine scriind numărul de două ori unul după altul. (De exemplu, repetatul lui 2018 este 20182018.) Există numere naturale al căror repetat este pătrat perfect?

Soluţie: (*David Andrei Anghel*)
Dacă n este un număr natural nenul cu k cifre, atunci repetatul său este $n \cdot 10^k + n = n(10^k + 1)$.
Vom arăta că există $n \in \mathbb{N}^*$ cu k cifre astfel încât $n(10^k + 1)$ este pătrat perfect.
Considerăm puterile lui 10 modulo 121 şi după încercări găsim că $10^{11} + 1 \,\vdots\, 121$.
Luând $k = 11$ şi $n = \dfrac{10^{11}+1}{121} \cdot 100 \in \mathbb{N}^*$, avem:
1. $n = (10^{11} + 1) \cdot \dfrac{100}{121} < 10^{11}$, deci n are cel mult 11 cifre;
2. $n = \dfrac{10^{11}+1}{121} \cdot 100 > \dfrac{10^{11}+1}{1000} \cdot 100 > 10^{10}$, deci n are cel puţin 11 cifre.
Aşadar n are într-adevăr $k = 11$ cifre.
În fine, $n(10^k + 1) = \dfrac{10^{11}+1}{121} \cdot 100 \cdot (10^{11} + 1) = \left(\dfrac{10^{11}+1}{11} \cdot 10\right)^2$ este pătrat perfect deoarece $11 \mid 10^{11} + 1$.

Comentariu: Căutăm un număr n de k cifre pentru care $n(10^k + 1)$ este pătrat perfect. Dacă $10^k + 1$ este liber de pătrate, atunci va trebui ca $10^k + 1$ să dividă n, ceea ce face ca n să aibă cel puţin $k + 1$ cifre. Trebuie aşadar să găsim mai întâi k pentru care $10^k + 1$ nu este liber de pătrate. Cel mai mic număr de această formă este $10^{11} + 1$ care este divizibil cu 11^2. Atunci alegem $k = 11$. Este evident că $\dfrac{10^{11}+1}{11^2} \cdot 10^2$, fiind puţin mai mic decât $10^{11} + 1$, va avea 11 cifre deci poate fi ales pe post de n.
De fapt, se poate lua $n = \dfrac{10^{11}+1}{11^2} \cdot m^2$ pentru orice $m \in \{4, 5, \ldots, 10\}$.

Problem of the week no. 79
The *repeat* of a positive integer is obtained by writing it twice in a row (so for example the repeat of 2018 is 20182018). Is there a positive integer whose repeat is a square number?
Solution: (*David Andrei Anghel*)
If n is a positive integer having k digits in its decimal representation, then its repaeat is $n \cdot 10^k + n = n(10^k + 1)$.
We prove that there exists $n \in \mathbb{N}$ with k decimal digits such that $n(10^k+1)$ is a perfect square. We notice that $10^{11}+1 \,\vdots\, 121$. Taking $k = 11$ and $n = \dfrac{10^{11}+1}{121} \cdot 100 \in \mathbb{N}$, we have:

1. $n = (10^{11}+1)\cdot\dfrac{100}{121} < 10^{11}$, therefore n has at most 11 digits;

2. $n = \dfrac{10^{11}+1}{121}\cdot 100 > \dfrac{10^{11}+1}{1000}\cdot 100 > 10^{10}$, hence n has at least 11 digits.

Thus n does indeed have $k = 11$ digits.

Finally, $n(10^k+1) = \dfrac{10^{11}+1}{121}\cdot 100\cdot(10^{11}+1) = \left(\dfrac{10^{11}+1}{11}\cdot 10\right)^2$ is a perfect square because $11 \mid 10^{11}+1$.

Se also here.