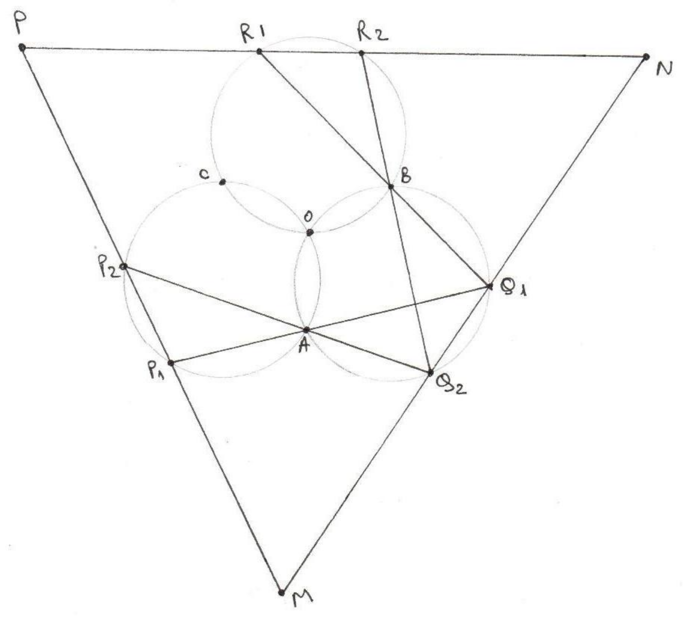
Problema săptămânii 76
Cercurile congruente $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ au în comun punctul O şi se intersectează a două oară în punctele $A \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$, $B \in \mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3$ şi $C \in \mathscr{C}_3 \cap \mathscr{C}_1$. Două drepte arbitrare care trec prin punctul A intersectează cercul $\mathscr{C}_1$ în P_1 şi P_2 şi cercul $\mathscr{C}_2$ în Q_1 şi Q_2. Fie $\{R_1\} = Q_1B \cap \mathscr{C}_3$, $\{R_2\} = Q_2B \cap \mathscr{C}_3$, $\{M\} = P_1P_2 \cap Q_1Q_2$, $\{N\} = Q_1Q_2 \cap R_1R_2$ şi $\{P\} = R_1R_2 \cap P_1P_2$.
Demonstraţi că O este centrul cercului înscris în triunghiul MNP.

Petru Braica

Problem of the week no. 76
Equal circles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ have in common point O and meet again in points $A \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$, $B \in \mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3$, and $C \in \mathscr{C}_3 \cap \mathscr{C}_1$. Two lines through A meet circle $\mathscr{C}_1$ at P_1 and P_2 and circle $\mathscr{C}_2$ at Q_1 and Q_2. Let $\{R_1\} = Q_1B \cap \mathscr{C}_3$, $\{R_2\} = Q_2B \cap \mathscr{C}_3$, $\{M\} = P_1P_2 \cap Q_1Q_2$, $\{N\} = Q_1Q_2 \cap R_1R_2$, and $\{P\} = R_1R_2 \cap P_1P_2$.
Prove that O is the incenter of triangle MNP.

Petru Braica

Soluţie: Vă prezentăm mai jos două soluţii trimise de *Vlad Vergelea*. Chiar dacă prima soluţie este mai simplă, cea de-a două dezvăluie mai multe din universul problemei. Să mai remarcăm şi că punctele R_1, C, P_1 sunt coliniare şi, similar, punctele R_2, C, P_2 sunt coliniare.



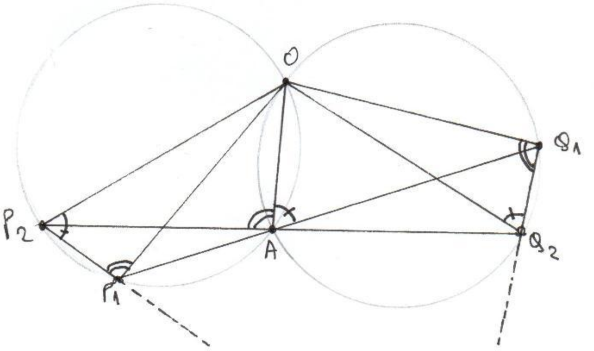
Deoarece $\widehat{OP_1P_2} \equiv \widehat{OAP_2} = 180° - \widehat{OAQ_2} = \widehat{OQ_1Q_2}$

şi analog $\widehat{OP_2P_1} \equiv \widehat{OQ_2Q_1}$

$\rightarrow \triangle OP_1P_2 \sim \triangle OQ_1Q_2$

Fie k raportul de asemănare şi R_p, R_q razele cercurilor circumscrise triunghiurilor.

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow k = \dfrac{R_p}{R_q} \\ \text{Dar } R_p = R_q \end{array}\right\} \rightarrow k = 1. \qquad \rightarrow \triangle OP_1P_2 \equiv \triangle OQ_1Q_2$$



Atunci $d(O, P_1P_2) = d(O, Q_1Q_2)$

$\rightarrow d(O, MP) = d(O, MN)$

$\rightarrow$ O este pe bisectoarea $\widehat{MNP}$

Analog O este pe bisectoarea $\widehat{MNP}$ de unde rezultă că este centrul cercului înscris în $\triangle MNP$.

Altă finalizare: O aparţine cercurilor $\triangle AP_1P_2$ şi $\triangle AQ_1Q_2$.
$\rightarrow$ O este punctul lui Miquel al patrulaterului complet $MQ_2AP_1Q_1P_2$ $\rightarrow$ O aparţine cercului MQ_2OP_2

Dar $OQ_2 = OP_2$ $\rightarrow$ (MO bisectoarea $\measuredangle NMP$.

Analog (NO bisectoarea $\widehat{MNP}$ de unde rezultă că O este centrul înscris în $\triangle MNP$.

q.e.d.