Problema săptămânii 75
Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale nenule n cu proprietatea că cel mai mare divizor prim al lui n^4+n^2+1 este egal cu cel mai mare divizor prim al lui $(n+1)^4+(n+1)^2+1$.

baraj seniori Franţa, 2014

Soluţie: Să notăm cu d_n cel mai mare divizor prim al lui n^2+n+1.
Din identitatea $n^4+n^2+1=(n^2+n+1)(n^2-n+1)=(n^2+n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]$ rezultă că $d_{n^2}=\max\{d_{n-1},d_n\}$.
Să mai observăm şi că $(n^2-n+1,\, n^2+n+1)=1$ implică $d_{n-1}\neq d_n$.
Să presupunem că există doar un număr finit de numere n pentru care $d_{n^2}=d_{(n+1)^2}$. Atunci, de la un anumit rang, n_0, avem $d_{n^2}\neq d_{(n+1)^2}$. Dacă pentru un asemenea n am avea $d_{n-1}<d_n$, adică $d_{n^2}=d_n$, pentru a nu avea egalitatea $d_{n^2}=d_{(n+1)^2}$ trebuie ca $d_{(n+1)^2}=d_{n+1}$, adică $d_n<d_{n+1}$. Ar rezulta că, de la un anumit rang, şirul (d_n) este unul strict crescător, ceea ce nu se poate pentru că $d_{n^2}\in\{d_n,d_{n-1}\}$.
Dacă nu există niciun $n\geq n_0$ pentru care $d_{n_1}<d_n$ înseamnă că şirul (d_n) este strict descrescător, ori un şir de numere naturale nu poate descreşte la nesfârşit. Am obţinut aşadar o contradicţie. Prin urmare există o infinitate de numere pentru care $d_{n^2}=d_{(n+1)^2}$.

Problem of the week no. 75
Prove that there are infinitely many positive integers n such that the largest prime factor of n^4+n^2+1 is equal to the largest prime factor of $(n+1)^4+(n+1)^2+1$.

TST France, 2014

Solution:
Let d_n denote the largest prime factor of n^2+n+1.
From $n^4+n^2+1=(n^2+n+1)(n^2-n+1)=(n^2+n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]$ it folows that $d_{n^2}=\max\{d_{n-1},d_n\}$.
Notice that $(n^2-n+1,\, n^2+n+1)=1$ leads to $d_{n-1}\neq d_n$.
Assume that there only exist a finite number of positive integers n such that $d_{n^2}=d_{(n+1)^2}$. Then, starting from some rank, n_0, we have $d_{n^2}\neq d_{(n+1)^2}$. If for such an n we would have $d_{n-1}<d_n$, i.e. $d_{n^2}=d_n$, in order to avoid $d_{n^2}=d_{(n+1)^2}$, we must have $d_{(n+1)^2}=d_{n+1}$, i.e. $d_n<d_{n+1}$. It would follow that the sequence (d_n) is strictly increasing from some rank, which is not possible because $d_{n^2}\in\{d_n,d_{n-1}\}$.
If there is no $n\geq n_0$ for which $d_{n_1}<d_n$, then the sequence (d_n) is strictly decreasing, but a sequence of positive integers cannot decay forever. We have obtained a contradiction. In conclusion, there are infinitely many positive integers n for which $d_{n^2}=d_{(n+1)^2}$ holds.