Problema săptămânii 74
Anna şi Berta joacă un joc în care ele mută alternativ, îndepărtând jetoane de pe masă. Anna mută prima. Dacă jucătoarea care urmează la mutare găseşte pe masă $n \geq 1$ jetoane, ea poate lua k jetoane, unde $k \geq 1$ este fie un număr par cu $k \leq \frac{n}{2}$, sau un număr impar cu $\frac{n}{2} \leq k \leq n$. Un jucător câştigă jocul dacă îndepărtează ultimul jeton de pe masă. Determinaţi cel mai mic număr $N \geq 100000$ astfel încât Berta să-şi poată asigura victoria în cazul în care jocul începe cu N jetoane pe masă.

Olimpiadă Austria, 2017 (Gerhard Woeginger)

Soluţie: Spunem despre un număr natural p că este o poziţie câştigătoare dacă jucătorul care, urmând la mutare, găseşte p jetoane pe masă şi are strategie câţigătoare. Celelalte poziţii le numim pierzătoare. Evident, 0 este poziţie pierzătoare. O analiză retrogradă ne permite să identificăm natura unora din poziţii: 1 este poziţie câştigătoare (poate lua jetonul), 2 este pierzătoare (trebuie să ia 1 jeton, iar de acolo, am văzut, câştigă adversarul). 3 este câştigătoare (pot lua toate jetoanele), 4 este câştigătoare (pot lua 2 jetoane lăsând adversarul cu 2 jetoane, poziţie pierzătoare), 5 este câştigătoare, dar 6 este pierzătoare. Eventual continuăm etichetarea poziţiilor până ghicim ce se întâmplă: aparent poziţiile pierzătoare sunt cele de forma $2^a - 2$, cu $a \geq 1$. Să demonstrăm acest lucru. Evident, jocul se termină la un moment dat (la fiecare mutare numărul jetoanelor scade şi nu există alt final decât victoria unuia dintre jucători). Să arătăm că dintr-o poziţie de forma $2^a - 2$ nu există mutare către o altă poziţie de aceeaşi formă. Dacă s-ar putea muta la $2^b - 2$ s-ar lua $2^a - 2^b \geq 2^{a-1}$ jetoane, adică un număr par, dar avem voie să luăm cel mult $2^{a-1} - 1$ jetoane (dacă luăm un număr pare de jetoane). Aşadar, dintr-o poziţie pierzătoare nu există mutare care să lase adversarul într-o poziţie pierzătoare. Arătăm că, reciproc, din orice poziţie câştigătoare există mutare câştigătoare, adică una care să lase adversarul în poziţie pierzătoare. Dacă pe masă sunt m jetoane, $2^a - 2 < m < 2^{a+1} - 2$, atunci: dacă m este impar se pot lua toate jetoanele, dacă m este par, pot lua $m - 2^a + 2$ jetoane (adică un număr par mai mic sau egal cu $\frac{m}{2}$) şi lăsa adversarul în poziţia pierzătoare $2^a - 2$. Aşadar poziţiile pierzătoare sunt cele de forma $2^a - 2$ iar strategia câştigătoare a celui care nu începe dintr-o asemenea poziţie este să lase mereu $2^a - 2$ jetoane. Cea mai mică poziţie pierzătoare mai mare ca 100000 este $131070 = 2^{17} - 2$.
A se consulta şi soluţia oficială în engleză.

Problem of the week no. 74
Anna and Berta play a game in which they take turns in removing marbles from a table. Anna takes the first turn. When at the beginning of a turn there are $n \geq 1$ marbles on the table, then the player whose turn it is removes k marbles, where $k \geq 1$ is either an even number with $k \leq \frac{n}{2}$ or an odd number with $\frac{n}{2} \leq k \leq n$. A player wins the game if she removes the last marble from the table. Determine the smallest number $N \geq 100000$ such that Berta can enforce a victory if there are exactly N marbles on the table in the beginning.

Austrian Olympiad, 2017

The official solution, in English, can be found here.