Problema săptămânii 73

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ numere reale pozitive. Arătaţi că

$$\frac{1}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_1x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}\geq 4(1-x_1x_2\ldots x_{n+1}).$$

The Mathematics Ashes, 2008

Soluţia 1: (spargere)

Notând $x_0=1$ avem

$$\frac{x_0x_1x_2\ldots x_{k-1}}{x_k}\geq 4x_0x_1x_2\ldots x_{k-1}(1-x_k)\,,\qquad \forall\, k=1,2,\ldots,n+1.$$

Adunând aceste relaţii obţinem concluzia.

Deoarece în inegalităţile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă $x_k=\dfrac{1}{2}$, în inegalitatea din enunţ avem egalitate dacă toate numerele sunt egale cu $\dfrac{1}{2}$.

Soluţia 2: (inducţie)

Notăm $x_0=1$ şi demonstrăm afirmaţia din enunţ prin inducţie după $n\geq 0$.

Pentru $n=0$ inegalitatea revine la $\dfrac{1}{x_1}\geq 4(1-x_1)$, echivalentă cu $(2x_1-1)^2\geq 2$, care este evident adevărată, cu egalitate pentru $x_1=\dfrac{1}{2}$.

Presupunând afirmaţia adevărată pentru un $n\geq 0$, să o demonstrăm pentru $n+1$.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_1x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}+\frac{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}}{x_{n+2}}\overset{P(0)}{\geq}\frac{1}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_1x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}+x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}(4-x_{n+2})\overset{P(n)}{\geq}4(1-x_1x_2\ldots x_{n+1})+x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}(4-x_{n+2})=4-x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}x_{n+2}.$$

Egalitate avem dacă $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}$ şi dacă avem egalitate şi în inegalitatea din $P(n)$.

Prin inducţie rezultă atunci imediat că egalitatea în inegalitatea din $P(n)$ are loc dacă $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{1}{2}$.

Comentariu: În esenţă, această soluţie este echivalentă cu prima, însă are avantajul de a face spargerea naturală şi uşor de găsit.

Soluţia 3: (*Marian Daniel Vasile*)

Faptul că putem intui uşor cazul de egalitate $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{1}{2}$ ne face să ne gândim la a aplica inegalitatea ponderată a mediilor pentru numerele

$$\frac{1}{2^nx_1}\,,\ \frac{x_1}{2^{n-1}x_2}\,,\ \frac{x_1x_2}{2^{n-2}x_3}\,,\ \ldots\,,\ \frac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{2x_n}\,,\ \frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}\ \text{şi}\ 4x_1x_2\ldots x_{n+1},$$

cu ponderile 2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, …, 2, 1 şi respectiv 1.

(În cazul de egalitate toate numerele sunt egale cu $\dfrac{1}{2^{n-1}}$, iar suma ponderilor este 2^{n+1}.)
Rescriem inegalitatea de demonstrat sub forma

$$\frac{1}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_1x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}+4x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}\geq 4$$

şi aplicăm inegalitatea ponderată a mediilor:
$\dfrac{1}{2^nx_1}\cdot 2^n+\dfrac{x_1}{2^{n-1}x_2}\cdot 2^{n-1}+\dfrac{x_1x_2}{2^{n-2}x_3}\cdot 2^{n-2}+\ldots+\dfrac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{2x_n}\cdot 2+\dfrac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}+$
$4x_1x_2\ldots x_{n+1}\geq 2^{n+1}P^{1/2n+1}$, unde $P=\left(\dfrac{1}{2^nx_1}\right)^{2^n}\cdot\left(\dfrac{x_1}{2^{n-1}x_2}\right)^{2^{n-1}}\cdot\left(\dfrac{x_1x_2}{2^{n-2}x_3}\right)^{2^{n-2}}\cdot$
$\ldots\cdot\left(\dfrac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{2x_n}\right)^2\cdot\dfrac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}\cdot 4x_1x_2\ldots x_{n+1}$. În acest produs factorul x_k apare cu exponentul $1+1+2+\ldots+2^{k-1}-2^k=0$, deci se reduce. Rămânem cu $P=\dfrac{4}{2^S}$, unde $S=n2^n+(n-1)2^{n-1}+\ldots+2\cdot 2^2+1\cdot 2^1$.
Suma S poate fi calculată prin (cel puţin) 3 metode:
1. ghicim şi verificăm prin inducţie că $S=(n-1)2^{n+1}+2$,
2. scriem $S=(2^n+2^{n-1}+\ldots+2)+(2^n+2^{n-1}+\ldots+2^2)+\ldots+(2^n+2^{n-1})+2^n=(2^{n+1}-2)+(2^{n+1}-2^2)+\ldots+(2^{n+1}-2^{n-1})+(2^{n+1}-2^n)=n2^{n+1}-(2+2^2+\ldots+2^n)=(n-1)2^{n+1}+2$,
3. folosind derivate: dacă $f(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (pentru $x\neq 1$), atunci $f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-1}+\ldots+2x+1=\dfrac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$.
Pentru $x=2$ obţinem $\dfrac{S}{2}=f'(2)=(n-1)2^n+1$.

Rezultă că $P=\dfrac{1}{2^{(n-1)2^{n+1}}}$, deci $2^{n+1}P^{1/2n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{2^{n-1}}=4$, adică inegalitatea de demonstrat.

Soluţia 4: (*Titu Zvonaru, Radu Popescu, Marius Stănean*)
Inegalitatea din enunţ se poate scrie $\left(2\sqrt{x_1}-\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+x_1\left(2\sqrt{x_2}-\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2+$
$x_1x_2\left(2\sqrt{x_3}-\dfrac{1}{\sqrt{x_3}}\right)^2+\ldots+x_1x_2\ldots x_n\left(2\sqrt{x_{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}\right)^2\geq 0.$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $x_1=x_2=\ldots=x_{n+1}=\dfrac{1}{2}$.

Problem of the week no. 73
Let $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ be positive real numbers. Prove that

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_1 x_2 x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \ldots x_{n+1}).$$

The Mathematics Ashes, 2008

Solution:
Denoting $x_0 = 1$, we have

$$\frac{x_0 x_1 x_2 \ldots x_{k-1}}{x_k} \geq 4 x_0 x_1 x_2 \ldots x_{k-1}(1 - x_k)\,, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Summing these inequalities gives the desired conclusion.
Equality holds if and only if $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = \dfrac{1}{2}$.

A more natural approach is by induction.