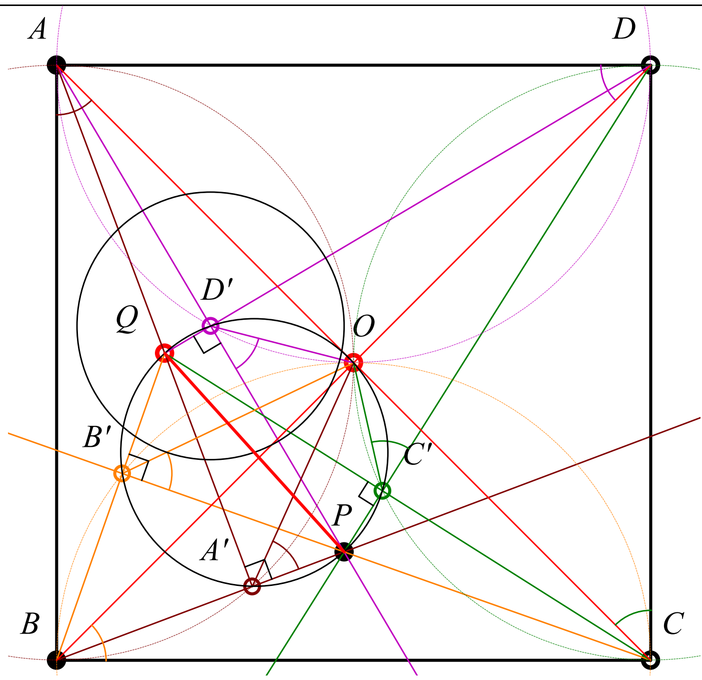
Problema săptămânii 72:

Fie P un punct din interiorul pătratului $ABCD$. Demonstraţi că perpendicularele duse din vârfurile A, B, C, D pe dreptele BP, CP, DP şi respectiv AP, sunt concurente.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $A' = pr_{BP}(A), B' = pr_{CP}(B), C' = pr_{DP}(C), D' = pr_{AP}(D)$ şi cu: $\{O\} = [AC] \cap [BD]$; avem:

$$\left.\begin{array}{r} ABCD - patrat \Rightarrow AC \perp BD \\ A' = pr_{BP}(A) \Rightarrow AA' \perp BP \end{array}\right\} \Rightarrow OABA' - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{OA'P}\right) = m\left(\widehat{OAP}\right) = 45^0. \quad (1)$$

În mod analog se arată că: $OB'BC - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{OB'P}\right) = m\left(\widehat{OBC}\right) = 45^0; \quad (2)$

$$OC'CD - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{OC'D}\right) = m\left(\widehat{OCD}\right) = 45^0; \quad (3)$$

şi $AD'OB - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{OD'P}\right) = m\left(\widehat{ADO}\right) = 45^0. \quad (4)$

Din relaţiile (1), (2), (3) şi (4), rezultă că: $\widehat{OA'P} \equiv \widehat{OB'P} \equiv \widehat{OC'D} \equiv \widehat{OD'P}$; iar de aici urmează că punctele A', B', C', D', P şi $O -$ sunt şase puncte conciclice.

Pe de altă parte, notând acum cu $Q -$ punctul diametral opus punctului P, în cercul circumscris hexagonului determinat de punctele A', B', C', D', P, O şi ţinând apoi seama de faptul că prin ipoteză avem: $AA' \perp BP, BB' \perp CP, CC' \perp DP$ şi $DD' \perp AP \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{Q \in AA', BB', CC', DD'}. \blacksquare$$