Stelele Matematicii 2017, Juniori — Soluţii

Problema 1. Câte dintre numerele naturale mai mici decât 2017 pot fi scrise în mod unic ca sumă a trei puteri naturale ale lui 2? (Două scrieri care diferă numai prin ordinea termenilor sunt considerate identice.)

Andrei Eckstein

Soluţie. Dacă un număr se scrie ca sumă de trei puteri naturale ale lui 2, nu neapărat distincte, grupând eventual termenii egali, obţinem o sumă de cel mult trei puteri *distincte* ale lui 2, deci reprezentarea în baza 2 a unui asemenea număr are cel mult trei cifre de 1. Convin numerele a căror reprezentare în baza 2 are trei cifre de 1, apoi numerele de forma $2^a + 1 = 2^{a-1} + 2^{a-1} + 1$ cu $a \in \mathbb{N}^*$ (numerele $2^a + 2^b$ cu $a > b \geq 1$ nu convin deoarece $2^a + 2^b = 2^{a-1} + 2^{a-1} + 2^b = 2^{b-1} + 2^{b-1} + 2^a$); în fine, convin numerele $2^c = 2^{c-1} + 2^{c-1} + 2^{c-2}$ dacă $c \geq 2$.

Numărăm mai întâi câte numere bune avem mai mici decât 2048. Aceste numere au cel mult 11 cifre în baza 2. Sunt $C_{11}^3 = 165$ mai mici decât 2048 care se scriu ca sumă de trei puteri distincte ale lui 2. Avem 10 numere de forma $2^a + 1$, $(1 \leq a \leq 10)$ şi 9 numere de forma 2^a, $(2 \leq a \leq 10)$, deci 184 de numere în total.

Numerele de la 2017 până la 2047 sunt mai mari decât $2^{10} + 2^9 + 2^8$, deci au mai mult de trei cifre de 1 în scrierea în baza 2, prin urmare niciunul dintre ele nu a fost numărat printre numerele bune. În concluzie, sunt 184 de numere bune mai mici ca 2017.

Problema 2. Fie x, y, z trei numere reale strict pozitive, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2(xy + yz + zx)$. Arătaţi că $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq 3$ şi determinaţi cazurile de egalitate.

Vlad Robu

Soluţia 1. Folosind condiţia din enunţ, rescriem inegalitatea sub forma echivalentă

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq \sqrt{3(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2)}$$

sau, notând $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$, $\sqrt{z} = c$, $(ab + bc + ca)^2 \geq 3(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)$, ceea ce revine la $3(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2bc + b^2ca + c^2ab) \geq 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Reamintim inegalitatea lui Schur: $a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - c)(b - a) + c^2(c - a)(c - b) \geq 0$. Înmulţită cu 2, ea revine la

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2bc + b^2ca + c^2ab) \geq 2(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b).$$

Dar $2(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) = 2ab(a^2 + b^2) + 2bc(b^2 + c^2) + 2ca(c^2 + a^2) \geq 4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2$ şi $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Adunând ultimele trei inegalităţi obţinem inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

Soluţia 2. Rescriem $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2(xy + yz + zx)$ sub forma

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x} - \sqrt{y}) = 3.$$

Notând $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 2a$, $\sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{x} = 2b$, $\sqrt{z} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2c$, condiţia din enunţ devine $abc(a + b + c) = 3/16$.

Întrucât numerele $a + b + c = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})/2$, $a + b = \sqrt{y}$, $b + c = \sqrt{z}$, $c + a = \sqrt{x}$, sunt strict pozitive, din condiţia de mai sus, rezultă că şi numerele a, b, c sunt strict pozitive.

Inegalitatea din enunţ devine $(a+b)(a+c)+(b+a)(b+c)+(c+a)(c+a) \geq 3$. Dar

$$\sum_{cyc}(a+b)(a+c) = \sum_{cyc} a^2 + 3\sum_{cyc} ab = 4\sum_{cyc} ab + \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2 \geq 4\sum_{cyc} ab, \tag{1}$$

iar

$$\left(\sum_{cyc} ab\right)^2 = 3abc(a+b+c) + \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2(b-c)^2 \geq 3abc(a+b+c) = \frac{9}{16}. \tag{2}$$

Întrucât a, b, c sunt strict pozitive, (2) implică $ab+bc+ca \geq 3/4$, care, împreună cu (1), implică inegalitatea cerută. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1/2$, i.e., $x=y=z=1$.

Problema 3. Fie $P_1P_2\dots P_n$ un poligon regulat cu n laturi. O broască aflată în vârful P_k $(1 \leq k \leq n)$ poate sări într-unul dintre vârfurile P_{k+2} sau P_{k-3}, indicii fiind reduşi modulo n. Determinaţi mulţimea numerelor naturale $n \geq 3$, care au următoarea proprietate: broasca poate face n sărituri, astfel încât să viziteze fiecare vârf al poligonului şi să se întoarcă în vârful din care a pornit.

Andrei Eckstein

Soluţie. Mulţimea cerută este formată din toate numerele naturale mai mari sau egale cu 3, care nu sunt divizibile cu 6, împreună cu toţi multiplii lui 5, inclusiv cei divizibili cu 6; adică, toate numerele naturale mai mari sau egale cu 3, care, împărţite la 30, nu dau restul 6, 12, 18, 24.

Dacă n este un număr cu proprietatea din enunţ şi a este numărul de sărituri de tipul $P_k \mapsto P_{k+2}$, iar b este numărul de sărituri de tipul $P_k \mapsto P_{k-3}$, atunci $a+b=n$ şi $n \mid 2a-3b$, de unde rezultă că $n \mid 5a$ şi $n \mid 5b$. Cum $0 \leq a, b \leq n$, trebuie să avem fie $a=0$, $b=n$, fie $b=0$, $a=n$, fie $5 \mid n$. Făcând numai sărituri de forma $P_k \mapsto P_{k+2}$ broasca va vizita toate vârfurile dacă şi numai dacă n este impar, iar făcând numai sărituri de forma $P_k \mapsto P_{k-3}$ ea va parcurge toate vârfurile dacă şi numai dacă $3 \nmid n$. În concluzie, dacă un număr este bun, atunci el fie nu se divide cu 2, fie nu se divide cu 3, fie se divide cu 5.

Reciproc, am văzut că, dacă $6 \nmid n$, atunci broasca poate parcurge toate vârurile facând sărituri de lungime egală.

În fine, dacă n este divizibil cu 5, broasca poate efectua următoarea succesiune de salturi: $P_k \mapsto P_{k+2}$, pentru fiecare indice k nedivizibil cu 5, şi $P_k \mapsto P_{k-3}$, pentru fiecare indice k divizibil cu 5; în acest fel, ea parcurge un ciclu de lungime n, care trece prin fiecare vârf al poligonului.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, astfel încât $AB < AC$. Fie M mijlocul laturii BC şi fie D un punct situat în interiorul segmentului AM. Fie E un punct interior al segmentului BD şi fie F punctul situat pe AB, astfel încât EF şi BC să fie paralele. Arătaţi că, dacă dreptele AE şi DF trec prin ortocentrul triunghiului ABC, atunci bisectoarele interioare ale unghiurilor BAC şi BDC se intersectează pe BC.

Vlad Robu

Soluţie. Fie H ortocentrul lui ABC, D' proiecţia lui H pe AM, $\{E'\} = BD' \cap AH$ şi $\{F'\} = D'H \cap AB$. Arătăm că $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$, deci $HD \perp AM$.

Fie H_0 şi D'_0 simetricele punctelor H, respectiv D' faţă de M. Se ştie că H_0 este punctul de pe cercul circumscris triunghiului ABC diametral opus lui A şi, cum $m(\angle H_0D'_0A) =$

$m(\angle HD'M) = 90°$, punctul D'_0 este şi el pe cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci punctele B, C, H, D' se află pe simetricul acestui cerc faţă de M, adică patrulaterul $BHD'C$ este inscriptibil. Deducem că $m(\angle HD'E') = m(\angle HD'B) = m(\angle HCB) = 90° - m(\angle B) = m(\angle F'AH)$, deci patrulaterul $AF'E'D'$ este inscriptibil, de unde rezultă că $m(\angle F'E'A) = m(\angle F'D'A) = 90°$, aşadar că $E'F' \parallel BC$.

Dacă $D \in (AD')$, atunci $E \in (AE')$, iar punctul F, în care se intersectează dreptele AB şi DH, se află pe semidreapta deschisă $F'B$, cu originea în F', deci $EF \nparallel BC$. Analog în cazul $D \in (D'M)$. Rezultă că este necesar ca $D = D'$ şi atunci $E = E'$, $F = F'$.

Cum ABD'_0C este inscriptibil, $m(\angle ABD'_0) = 180° - m(\angle ACD'_0)$, deci $\sin(\angle ABD'_0) = \sin(\angle ACD'_0)$. Dar M fiind mijlocul lui $[BC]$, triunghiurile ABD'_0 şi ACD'_0 au arii egale, deci $AB \cdot BD'_0 \cdot \sin(\angle ABD'_0) = AC \cdot CD'_0 \cdot \sin(\angle ABD'_0)$, de unde $AB \cdot BD'_0 = AC \cdot CD'_0$, sau $AB \cdot CD = AC \cdot BD$, adică $AB/AC = DB/DC$, ceea ce, conform reciprocei teoremei bisectoarei, conduce la concluzie.