

1. Determinați numerele prime p care au proprietatea că există m, n numere naturale nenule astfel încât $\frac{5}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

prelucrare a problemei E:14695 din GM. nr. 6-7-8

Soluție: Arătăm că numerele căutate sunt 5 și numerele prime care dau restul 4 la împărțirea cu 5.

Fie p un număr prim cu proprietatea din enunț. Presupunem că există numerele naturale m și n cu proprietatea din enunț. Relația $\frac{5}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ se scrie echivalent $5mn = pm + pn$, adică $25mn - 5pm - 5pn + p^2 = p^2$, care revine la $(5m - p)(5n - p) = p^2$. Deoarece $\frac{5}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$, rezultă $5m > p$ și, analog, $5n > p$, deci $5m - p$ și $5n - p$ trebuie să fie divizori pozitivi ai lui p^2 , deci 1, p sau p^2 . Cazul $5m - p = 5n - p = p$ duce la $5m = 2p$ adică la $5 \mid p$, deci la $p = 5$. În celălalt caz rezultă că $5m - p = 1$ și $5n - p = p^2$ (sau invers, nu contează). Din prima relație rezultă că $p = 5m - 1$ trebuie să dea restul 4 la împărțirea cu 5.

Reciproc, dacă $p = 5$, putem lua $m = n = 2$, iar dacă p dă restul 4 la împărțirea cu 5, din relațiile de mai sus se vede că putem alege $m = \frac{p+1}{5} \in \mathbb{N}^*$ și $n = \frac{p(p+1)}{5} \in \mathbb{N}^*$, numere care satisfac relația $\frac{5}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

2. a) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există $k \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = n.$$

b) Determinați valorile numărului natural n pentru care ecuația

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = n$$

are soluții în mulțimea numerelor naturale nenule.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

* * *

Soluție: a) De exemplu se poate lua $k = n - 1$ și $a_j = j$. Vom avea că $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} = n$.

b) Din $1 < 1 + \frac{1}{x} \leq 2$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$, deducem că putem avea soluții numai cu

$n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Pentru $n = 2$ avem, de exemplu soluția $(a, b, c) = (3, 4, 5)$; pentru $n = 3$ avem de exemplu $(a, b, c) = (1, 3, 8)$; pentru $n = 4$ avem $(a, b, c) = (1, 2, 3)$; pentru $n = 5$ putem lua $(a, b, c) = (1, 1, 4)$; pentru $n = 6$ avem $a = 2, b = c = 1$; pentru $n = 8, a = b = c = 1$; pentru $n = 7$: dacă $a = b = c = 1$ atunci obținem 8, iar în caz contrar obținem cel mult $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 6$. Așadar soluții avem pentru $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

c) Putem deocamdată presupune $a \geq b \geq c$. Observăm că trebuie ca $\left(1 + \frac{1}{c}\right)^3 \geq 2$, de unde $c \leq 3$.

• Dacă $c = 1$ atunci ar trebui ca $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1$, ceea ce este imposibil.

• Dacă $c = 2$ atunci $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$, deci $\left(1 + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{4}{3}$, de unde $b \leq 6$.

Încercând aceste valori obținem soluțiile $(a, b, c) \in \{(7, 6, 2), (9, 5, 2), (15, 4, 2)\}$.

• Dacă $c = 3$ atunci $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}$, deci $\left(1 + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{3}{2}$, de unde $b \leq 4$, adică $b \in \{3, 4\}$. Găsim soluțiile $(a, b, c) = (8, 3, 3)$ și $(5, 4, 3)$.

Așadar problema are 27 de soluții: cele găsite mai sus și cele obținute prin permutarea componentelor acestora.

3. Pe un cerc sunt scrise 2014 numere, doi de 1 și 2012 de 0. Se poate efectua următoarea operație: se alege un număr și i se schimbă cei doi vecini din 0 în 1 și invers. Făcând astfel de operații, putem să obținem 2014 de 1 pe cerc?

ViitoriOlimpici.ro, etapa 5, problema 4

Soluție: Răspunsul depinde de poziția celor două cifre de 1 de pe cerc. Dacă colorăm cele 2014 numere, alternativ, în alb și negru, răspunsul este că dacă cele două cifre de 1 au aceeași culoare atunci nu putem face ca toate numerele de pe cerc să devină 1, în vreme ce în cazul în care cele două cifre de 1 au culori diferite, putem ajunge la configurația finală dorită.

Dacă 1-urile au aceeași culoare: să observăm că paritate numărului de 1-uri negre este invariant la o operație. Orice operație vizează fie două numere negre fie două numere albe. Dacă ea vizează numere negre, numărul de 1-uri negre poate să crească cu 2 (dacă se schimbă două 0-uri negre în 1-uri), să scadă cu 2 (dacă se schimbă două 1-uri negre în 0-uri) sau să rămână neschimbat dacă se schimbă un 0 și un 1 într-un 1 și respectiv un 0. Dacă inițial 1-urile au aceeași culoare, atunci avem fie zero fie două 1-uri negre, oricum un număr par. Prin urmare numărul de 1-uri negre de pe cerc va fi mereu par. La final, ar trebui să avem numai 1-uri, în particular 1007 1-uri negre, adică un număr impar. Acest lucru nu este posibil, deci nu putem ajunge la respectiva configurație.

Dacă 1-urile au culori diferite: să observăm că putem face cei doi de 1 să fie vecini. Într-adevăr, dacă inițial ei nu sunt vecini, putem alege un 0 vecin cu un 1 și face operația. Efectul este că 1-le se va „muta” în poziția simetrică față de 0-ul ales. Repetând această manevră, putem face ca cei doi de 1 să devină vecini. Celelalte 2012 numere le grupăm acum câte 4. În fiecare din cele 503 grupe, alegem, pe rând, cele două cifre din mijloc și facem operația. Cele două operații vor transforma grupa de patru 0-uri în patru de 1. Procedând astfel pentru fiecare grupă, vom transforma toate numerele de pe cerc în 1-uri.